CALCUL DIFFERENTIEL ET OPTIMISATION

Exercice 1
On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2
Etudier les extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$f \ : \ (x,y)\mapsto x^2+x^2y+y^3$$

Exercice 3
On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

1. Soit $\phi:(u,v)\mapsto(u,v+u^2)$. Montrer que ϕ est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que ϕ et son inverse sont $\mathcal{C}^1$. On explicitera l'inverse de ϕ.
2. A l'aide d'un changement de fonction inconnue, déterminer toutes les solutions de l'EDP qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4
Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+2y^2\leq 8\}$. Soit $f \ : \ (x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}+x^2$.

1. Montrer que f admet des extrema sur D.
2. Montrer que le seul point intérieur à D où f atteint un extremum est $(0,0)$.
3. Trouver les extrema de f sur D.

Exercice 5
Etudier les extrema locaux de $f \ : \ (x,y)\mapsto x^2y+\ln(4+y^2)$.

Exercice 6
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=0$. Existe-t-il un plan tangent à la surface et perpendiculaire au vecteur $v=(1,2,3)$?

Exercice 7
On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
Déterminer les extrema de f sur le rectangle $U = [0, 3] \times [1, 5]$?

Exercice 8

1. Représenter $Q =]0, +\infty[^2$ et $Q' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, |v| < u\}$.
2. Montrer que φ, définie sur Q par
$$\forall (x, y) \in Q, \quad \varphi(x, y) = (y^2 + x^2, y^2 - x^2)$$
est une bijection de Q dans Q'. Trouver φ^{-1}.
3. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Q et que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Q'.
4. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de Q dans $\mathbb{R}$, vérifiant :
$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy. \qquad (1)$$
Quelle équation différentielle doit vérifier $\tilde{f}$, telle que $\tilde{f} \circ \varphi = f$, pour que f soit solution de (1) ? La résoudre et en déduire f.

Exercice 9
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $(.|.)$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, $(f(x)|x) > 0$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit l'application g sur $\mathbb{R}^n$ par
$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$$
   (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et expliciter ses dérivées partielles par rapport à une base adaptée.
   (b) Montrer que g admet un unique point critique c.
   (c) Montrer que g présente un minimum global en c.

Exercice 10*
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que $f : U \mapsto \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ lorsque $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe. En notant $P = \mathrm{Re}(f)$ et $Q = \mathrm{Im}(f)$, montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ si et seulement si, f est différentiable en z_0 avec :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0).$$

Exercice 11*
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1. Calculer le laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées de φ.
2. Quelles sont les fonctions φ pour lesquelles f est harmonique, i.e. telle que $\Delta f = 0$? Calculer alors f.
3. Déterminer la solution f telle que $f(1,1) = 0$ et $f(1,0) = 1$.

Exercice 12* Fonctions radiales harmoniques
Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f est radiale, i.e. qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad f(x) = \varphi(\|x\|)$$

où $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ est la norme euclidienne de $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

1. Exprimer le laplacien de f en fonction de φ.
2. Déterminer les fonctions radiales f qui sont harmoniques, i.e. telles que $\Delta f = 0$.

Exercice 13* Mines-Ponts
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
   En déduire le domaine de définition de f.
2. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier l'existence et calculer $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
4. Justifier l'existence et donner la valeur de $\partial_1 f(0,0)$ et $\partial_2 f(0,0)$.
5. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 14* (**Une preuve du théorème spectral**)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \dfrac{\langle AX, X\rangle}{\|X\|^2} \end{array}$$

où $\langle .|. \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ la norme associée.

1. Justifier l'existence de $\max\limits_{X \in S} f(X)$ où S est la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On notera E_1 un point de S où f atteint son maximum.
2. Montrer que $\langle AE_1, E_1\rangle$ est le maximum de f sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
3. Après avoir déterminé la différentielle de f, montrer que
$$\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle AE_1, H\rangle = \langle AE_1, E_1\rangle.\langle E_1, H\rangle.$$
4. En déduire que E_1 est un vecteur propre de A, et trouver une preuve du théorème spectral : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 15**
On se place dans $E = S_n(\mathbb{R})$. On pose $U = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que U est un ouvert de E.
2. Montrer que pour tout $A \in U$, il existe une unique $B \in U$ telle que $B^2 = A$. On note $B = \sqrt{A}$.
3. Montrer que $f : U \to U$, $A \mapsto \sqrt{A}$ est différentiable.
On pourra montrer que $g : U \to U$, $A \mapsto A^2$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.