SERIES NUMERIQUES

Exercice 1
Déterminer la nature de la série de terme général :

a. $\text{th}\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)$, **b.** $(\ln n)^{-\sqrt{n}}$, **c.** $n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$, **d.** $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-n^2}$, **e.** $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(\ln n)^2}$,

f. $\frac{n^n}{2^{n^2}}$, **g.** $\left(\text{ch}\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$, **h.** $\exp\left(-\sqrt{(\ln n)^2+a}\right)$ avec $a \in \mathbb{R}$, **j.** $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^a}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2
Déterminer la nature de la série de terme général :

a. $\frac{(-1)^n\sqrt{n}+\sin n}{n^2}$, **b.** $\left(1-\frac{n}{\ln n}\right)^{-n}$, **c.** $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$, **d.** $(-1)^n n^{-(1+n^a)}$ où $a \in \mathbb{R}$,

e. $\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$, **f.** $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$, **g.** $\frac{(-1)^n}{n^{2/3}+(-1)^n n^{1/3}}$, **h.** $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{1}{n}$,

i. $\frac{\left(\prod_{k=2}^{n}\ln k\right)^a}{(n!)^b}$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, **k.** $n!\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{2^k}$, **l.** $\frac{\ln n!}{n!}$, **m.** $\frac{1}{\binom{np}{n}}$,

n. $\frac{n^n}{n!e^n}$, **o.** $\frac{n^a n! e^n}{(n+1)^n}$ avec $a \in \mathbb{R}$, **p.** $\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}$, **q** $(\ln n \ln(\text{ch } n))^{-1}$.

Exercice 3
Soit (u_n) une suite de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = \ln(1+u_n)$.
Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Exercice 4
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{\cos u_n}{n}$. Etudier la nature de $\sum_{n\geq 1} u_n^\alpha$.

Exercice 5
Montrer que les séries de termes généraux suivants convergent et calculer leurs sommes :

a. $x^n\sin(n\theta)$ avec $x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, b. $\frac{\cos nx}{2^n\cos^n x}$ pour $n \geq 1$ et avec x réel tel que $\frac{1}{|2\cos x|} < 1$,

c. $\frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$, d. $\frac{1}{3^n}\sin^3(3^n\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6
a. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n+2)}$, $n \geq 1$, converge et calculer sa somme.
b. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\right)^n.$$

Exercice 7

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

3. Montrer que pour tout $u \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan}^2 u < \frac{1}{u^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 u$.

4. Conclure : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 8
On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^n \sin(nx)\, dx$$

1. Déterminer la limite de (u_n).

2. Montrer que $\forall n \geq 1,\ 2u_n = \frac{1}{n} + u_{n-1}$.

3. En déduire la nature de $\sum(u_n)$.

Exercice 9
Soit $A_n = (-1)^n \int\limits_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt$.

1. Etudier la convergence de la suite (A_n).

2. Montrer que $\sum A_n$ converge.

3. Calculer les sommes partielles de la série et en déduire la somme de la série.

Exercice 10
Etudier la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \frac{n}{\ln n}}.$$

Exercice 11
Soit $x \in]-1, 1]$. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)}$ converge.

Exercice 12
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+1)} \right) - \alpha \ln n.$$

Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ en $+\infty$.
Que dire de la suite (u_n) ?

Exercice 13
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n^x n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$ et $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right).$$
2. (a) Montrer que (v_n) est strictement décroissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$
3. Quelle est la nature de $\sum v_n$?
4. Quelle est la nature de $\sum u_n$? De (u_n) ?

Exercice 14
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. Déterminer la nature de $\sum(R_n)$ puis de $\sum((-1)^n R_n)$ selon les valeurs de α.

Exercice 15
Soit $\sum(a_n)$ une série à termes positifs. On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \geq 0$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{a_n^2 + u_n^2}}{2}$$

1. Montrer que $\forall n,\ u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$.
2. Montrer que la convergence de $\sum(a_n)$ entraîne la convergence de (u_n).
3. Etudier la réciproque.

Exercice 16
Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \in]0, \pi/2]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Etudier la suite (u_n).
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n^2.

Exercice 17
On considère la suite de terme général

$$a_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

1. Montrer que $\sum(a_n)$ converge.
2. En posant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, montrer que $H_{2n+1} - H_n \to \ln(2)$.
3. Calculer la somme de la série $\sum(a_n)$.

Exercice 18
Pour x, y réels strictement positifs, on pose $u_n(x, y) = \frac{x^n}{\sqrt{n + y^n}}$.
Déterminer $\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid \sum(u_n(x, y)) \text{ converge}\}$. Faire un dessin représentant cet ensemble.

Exercice 19
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{1+x} dx$. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 20
Soient $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. On suppose que $\sum u_n$ diverge et que $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. On note, pour n entier assez grand, $v_n = \frac{1}{\ln(S_n)} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k}$. Montrer que $v_n \underset{n \to +\infty}{\to} 1$.
On pourra remarquer que $\frac{u_n}{S_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$.

Exercice 21
Soient $\sum u_n$ une série divergente à termes positifs telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k S_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} S_n^2$$

où on a posé pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
On pourra montrer dans un premier temps que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $2u_k S_k = S_k^2 - S_{k-1}^2 + u_k^2$.