SERIES NUMERIQUES

Exercice 1
Déterminer la nature de la série de terme général :

a. $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$, **b.** $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$, **c.** $n^{-\ln(\ln n)}$, **d.** $n^{-(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$, **e.** $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

f. $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$, **g.** $\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^n$, **h.** $\frac{2^{(n^2)}}{n^{(2^n)}}$, **i.** $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+an+b}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

j. $n^{(n^a)}-1$ avec $a\in\mathbb{R}$, **k.** $(\ln n)^{a\ln n}$ où $a\in\mathbb{R}$, **l.** $\frac{3^{(2^n)}}{2^{(3^n)}}$, **m.** $\frac{\ln n!}{n!}$, **n.** $\frac{1}{\binom{np}{n}}$.

Exercice 2
Déterminer la nature de la série de terme général :
a. $(-1)^n\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, **b.** $\left(1-\frac{n}{\ln n}\right)^{-n}$, **c.** $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$, **d.** $\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$,

e. $(-1)^n n^{-(1+n^a)}$ où $a\in\mathbb{R}$, **f.** $(-1)^n e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$, **g.** $\frac{1}{n}$ si n est un carré d'entier, $\frac{(-1)^n}{n}$ sinon,

h. $\frac{n^n}{n!e^n}$, **w.** $\frac{n^a n! e^n}{(n+1)^n}$ avec $a\in\mathbb{R}$, **i.** $\frac{(2n)!}{n!a^n n^n}$ où $a\in\mathbb{R}_+^*$, **j.** $\frac{(n!)^a n^{bn}}{((2n)!)^c}$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 3
Soit (u_n) une suite de réels positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $v_n=\frac{u_n}{1+u_n^2}$.
a. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.
b. Montrer que si $\sum u_n$ diverge et (u_n) est majorée alors $\sum v_n$ diverge.
c. Donner un exemple de suite (u_n) telle que $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

Exercice 4
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 5
Montrer que les séries de termes généraux suivants convergent et calculer leurs sommes :

a. $x^n\cos(n\theta)$ avec $x\in]-1,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$, b. $\frac{\sin nx}{2^n\cos^n x}$ pour $n\geq 1$ et avec x réel tel que $\frac{1}{|2\cos x|}<1$,

c. $\ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{(\ln n)(\ln(n+2))}\right)$, pour $n\geq 2$, d. $\frac{(-1)^n}{3^n}\cos^3(3^n\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 6
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\right)^{-\frac{1}{2\ln n}}.$$

Exercice 7
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \ln n - n + \sum_{k=1}^{n} e^{-1/k}.$$

Trouver la suite (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.
En déduire que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 8
Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Exercice 9
Discuter selon les valeurs du réel a la convergence de la série de terme général

$$u_n = (\mathrm{ch}(1/n))^{-n^a}.$$

Exercice 10
Convergence de la série de terme général $\ln(\mathrm{th}\ n)$.

Exercice 11
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.

1. Etudier la convergence de $\sum u_n$.
2. Expliciter la somme de la série.

Exercice 12
Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que $\sum u_n$ converge.
2. Dans ce cas, calculer la somme.

Exercice 13
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Trouver un équivalent de (u_n) en $+\infty$.

Exercice 14
Etudier les séries de terme général u_n et $(-1)^n u_n$ où

$$u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 15
On pose $J_n = \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n \, dx$. Calculer $J(n+2) + J(n)$. En déduire les sommes des séries de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 16
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right|^{\frac{1}{\ln(\ln n)}}.$$

Exercice 17

1. Quelle est la nature de $\sum \frac{n^n}{n!}$?
2. Quelle est la nature selon p de $\sum \frac{n^{np}}{(np)!}$?

Exercice 18
Soit (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3v_{n+1} + (n+1)v_n = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-3)^k}{k!}$. Montrer que (w_n) converge et donner sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -\frac{n! w_n}{(-3)^{n+1}}$ et en déduire que (v_n) diverge.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit (u_n) par $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} + (n+1)u_n = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = u_n - v_n$. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre d_n, n et α. En déduire une expression de u_n.

   On suppose désormais que $3\alpha + e^{-3} - 1 = 0$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!}{(-3)^{n+1}} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-3)^k}{k!}$. En déduire que (u_n) converge.
5. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
6. Quelle est la nature de $\sum \left(u_n - \frac{1}{n}\right)$?

Exercice 19
On considère la suite (u_n) telle que:

$$u_0 > 0 \;\text{ et }\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

Etudier la série de terme général u_n et celle de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 20
Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sin k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 21
Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 22
On se donne $p \in \mathbb{R}_+^*$. et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général $u_n = n^\alpha \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{\ln(k+p)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23
Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2$.

1. Donner un équivalent de v_n.
2. Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{v_k}$.
3. En déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 24 Centrale 2

1. Donner l'ensemble D des réels x tels que $\sum(1/n^x)$ converge.
2. Donner l'ensemble des complexes z tels que $\sum(1/n^z)$ converge absolument.
3. Sous réserve d'existence, on note
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
Donner un entier n tel que
$$f(3) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 10^{-5}$$
et en déduire une valeur approchée de $f(3)$.
4. Représenter la courbe représentative de f sur un intervalle bien choisi.
5. On pose $z_1 = 3 + 2i$. Donner un entier n tel que
$$\left| f(z_1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{z_1}} \right| \leq 10^{-5}$$
En déduire une valeur approchée de $f(z_1)$.