SERIES NUMERIQUES

Exercice 1
Déterminer la nature de la série de terme général :

a. $\operatorname{th}\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)$, **b**. $(\ln n)^{-\sqrt{n}}$, **c**. $n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$, **d**. $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-n^2}$, **e**. $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(\ln n)^2}$,

f. $\frac{n^n}{2^{n^2}}$, **g**. $\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$, **h**. $\exp\left(-\sqrt{(\ln n)^2+a}\right)$ avec $a\in\mathbb{R}$, **j**. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^a}$ avec $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 2
Déterminer la nature de la série de terme général :

a. $\frac{(-1)^n\sqrt{n}+\sin n}{n^2}$, **b**. $\left(1-\frac{n}{\ln n}\right)^{-n}$, **c**. $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$, **d**. $(-1)^n n^{-(1+n^a)}$ où $a\in\mathbb{R}$,

e. $\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$, **f**. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$, **g**. $\frac{(-1)^n}{n^{2/3}+(-1)^n n^{1/3}}$, **h**. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cos\frac{1}{n}$,

i. $\frac{\left(\prod\limits_{k=2}^{n}\ln k\right)^a}{(n!)^b}$ où $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, **k**. $n!\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{2^k}$, **l**. $\frac{\ln n!}{n!}$, **m**. $\frac{1}{\binom{np}{n}}$,

n. $\frac{n^n}{n!e^n}$, **o**. $\frac{n^a n! e^n}{(n+1)^n}$ avec $a\in\mathbb{R}$, **p**. $\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}$, **q** $(\ln n\ln(\operatorname{ch} n))^{-1}$.

Exercice 3
Soit (u_n) une suite de réels positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $v_n=\ln(1+u_n)$.
Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Exercice 4
Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=\frac{\cos u_n}{n}$. Etudier la nature de $\sum\limits_{n\geq 1}u_n^\alpha$.

Exercice 5
Montrer que les séries de termes généraux suivants convergent et calculer leurs sommes :

a. $x^n\sin(n\theta)$ avec $x\in]-1,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$, b. $\frac{\cos nx}{2^n\cos^n x}$ pour $n\geq 1$ et avec x réel tel que $\frac{1}{|2\cos x|}<1$,

c. $\frac{1+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$, d. $\frac{1}{3^n}\sin^3(3^n\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 6
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+2n+1)^2} + \frac{1}{(x+2n)^2} - \frac{1}{(x+n)^2} \right) = 0.$$

Exercice 7
a. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n+2)}$, $n \geq 1$, converge et calculer sa somme.
b. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \right)^n.$$

Exercice 8

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.
3. Montrer que pour tout $u \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\text{cotan}^2 u < \frac{1}{u^2} < 1 + \text{cotan}^2 u$.
4. Conclure : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 9
On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^n \sin(nx) \, dx$$

1. Déterminer la limite de (u_n).
2. Montrer que $\forall n \geq 1, \; 2u_n = \frac{1}{n} + u_{n-1}$.
3. En déduire la nature de $\sum(u_n)$.

Exercice 10
Etudier la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \, dx.$$

Exercice 11
Soit $A_n = (-1)^n \int\limits_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt$.

1. Etudier la convergence de la suite (A_n).
2. Montrer que $\sum A_n$ converge.
3. Calculer les sommes partielles de la série et en déduire la somme de la série.

Exercice 12
Etudier la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \frac{n}{\ln n}}.$$

Exercice 13
Soit $x \in]-1, 1]$. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+x^n)}$ converge.

Exercice 14
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+1)}\right) - \alpha \ln n.$$

Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ en $+\infty$.
Que dire de la suite (u_n) ?

Exercice 15
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n^x n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$ et $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right).$$
2. (a) Montrer que (v_n) est strictement décroissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$
3. Quelle est la nature de $\sum v_n$?
4. Quelle est la nature de $\sum u_n$? De (u_n) ?

Exercice 16
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. Déterminer la nature de $\sum(R_n)$ puis de $\sum((-1)^n R_n)$ selon les valeurs de α.

Exercice 17
Soit $\sum(a_n)$ une série à termes positifs. On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \geq 0$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{a_n^2 + u_n^2}}{2}$$

1. Montrer que $\forall n,\ u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$.
2. Montrer que la convergence de $\sum(a_n)$ entraîne la convergence de (u_n).
3. Etudier la réciproque.

Exercice 18
Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \in]0, \pi/2]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Etudier la suite (u_n).
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n^2.

Exercice 19
On considère la suite de terme général

$$a_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

1. Montrer que $\sum(a_n)$ converge.
2. En posant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, montrer que $H_{2n+1} - H_n \to \ln(2)$.
3. Calculer la somme de la série $\sum(a_n)$.

Exercice 20
Pour $x, y > 0$, on pose $u_n(x,y) = \frac{x^n}{\sqrt{n} + y^n}$. Déterminer $\{(x,y)/\ \sum(u_n(x,y))\ \text{converge}\}$. Faire un dessin représentant cet ensemble.

Exercice 21
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{1+x} dx$. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.