FAMILLES SOMMABLES

Exercice 1
Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p\geq 2, q\geq 2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 2
Soit $z \in \mathbb{C}$. La famille $\left(\frac{z^n}{p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer sa somme.

Exercice 3
Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p|q}$ est sommable et calculer sa somme. On admettra $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 4
Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n$ converge. On admet que sa somme est $-\ln(1-x)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} H_n x^n$ converge.
3. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$. On pensera à un produit de Cauchy.

Exercice 5* Produit de Dirichlet de deux séries

1. Soient $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ deux séries absolument convergentes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$c_n = \sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}}.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} c_n$ est absolument convergente et que l'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right).$$

2. On pose, pour $\alpha > 1$

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $N(n)$ le nombre de diviseurs de n. Montrer que la série de terme général $\frac{N(n)}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et déterminer sa somme.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n. Montrer que pour $\alpha > 2$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 6* Produit eulérien

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$...
Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note A_N l'ensemble des entiers naturels dont les diviseurs premiers sont tous dans $\{p_1, \ldots, p_N\}$.

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^\alpha}} = \sum_{n\in A_N} \frac{1}{n^\alpha}.$$

2. En déduire que :

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

3. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{p_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.