REVISIONS ANALYSE

Exercice 1 Centrale 1
Soient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_0 = y_0 \in [0,7]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n},\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n, y_n \in [0,7]$.

b. On suppose que (x_n) et (y_n) convergent. Déterminer leurs limites.

c. Montrer que les suites ne sont pas strictement monotones. Convergent-elles ?

Corrigé
Si $x_n, y_n \in [0,7]$ alors $x_{n+1} \in [0,\sqrt{7}] \subset [0,7]$ et $y_{n+1} \in [\sqrt{7},\sqrt{14}] \subset [0,7]$. Comme $x_0, y_0 \in [0,7]$, on en déduit par récurrence que

$$\forall n,\ x_n, y_n \in [0,7]$$

Si (x_n) et (y_n) convergent vers des limites l_x et l_y alors $\begin{cases} l_x = \sqrt{7 - l_y} \\ l_y = \sqrt{7 + l_x} \end{cases}$. On en déduit que $l_y^4 - 14l_y^2 + l_y + 42 = 0$. Les solutions sont $-2, 3, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$. Comme $l_y \in [0,7]$ et $l_x \in [0,7]$, les calculs montrent que $l_y = 3$ et $l_x = 2$.
Si (x_n) était croissante alors, (y_n) serait aussi croissante à partir du rang 1 (puisque $y_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ et par croissance du passage à la racine carrée) et alors $(x_n)_{n\geq 2}$ serait décroissante (même type d'argument). La suite (x_n) serait constante à partir du rang 2 et donc il en serait de même pour (y_n)à partir du rang 3. On ne peut donc avoir stricte croissance de (x_n). On montre de façon plus générale qu'aucune des suites ne peut être strictement monotone.
On remarque maintenant que

$$|x_{n+1} - 2| = \frac{|3 - y_n|}{x_{n+1} + 2} \leq \frac{1}{2}|y_n - 3|$$

$$|y_{n+1} - 3| = \frac{|x_n - 2}{y_{n+1} + 3} \leq \frac{1}{3}|x_n - 2|$$

Une récurrence simple donne alors

$$\forall n,\ |x_{2n} - 2| \leq \frac{1}{6^n}|x_0 - 2| \ \text{ et } \ |x_{2n+1} - 2| \leq \frac{1}{6^n}|x_1 - 2|$$

et ainsi $x_n \to 2$. Il en résulte alors que $y_n \to \sqrt{7+2} = 3$.

Exercice 2 Mines-Ponts
Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut résoudre $\tan(x) = x$ sur $I_n =]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution x_n sur I_n.
2. Trouver un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.
3. Déterminer le développement asymptotique de x_n avec une précision $o(1/n^2)$.

Corrigé

La fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $I_n = \left]\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right[$ et sa dérivée $f' : x \mapsto \tan(x)^2$ est positive (et même strictement sauf en $n\pi$). f réalise donc une bijection de I_n dans $f(I_n) = \mathbb{R}$ (limites infinies aux bornes de I_n). Ainsi, 0 admet un unique antécédent par f dans I_n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, ! x_n \in I_n /\ \tan(x_n) = x_n$$

Comme $x_n \in I_n$, on a $x_n \sim n\pi$ c'est à dire

$$x_n = n\pi + o(n)$$

$y_n = x_n - n\pi \in]-\pi/2, \pi/2[$ et

$$\tan(y_n) = \tan(x_n) = x_n \to +\infty$$

Comme $y_n \in]-\pi/2, \pi/2[$, la composition par Arctan donne $y_n \to \pi/2$ et on a donc

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

Posons $z_n = x_n - n\pi - \pi/2$. La relation $\tan(x_n) = x_n$ devient

$$\tan(z_n) = -\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n}$$

Comme $x_n \in [n\pi, (n + 1/2)\pi[$, on a $z_n \in]-\pi/2, 0]$ et on peut composer par Arctan pour obtenir

$$z_n = \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n}\right)$$

Comme $\arctan(x) \sim x$ quand $x \to 0$, on en déduit que $z_n \sim -\frac{1}{n\pi}$ c'est à dire

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut en fait être plus efficace car

$$\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} = \frac{1}{n\pi}\frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(1/n)} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $\operatorname{Arctan}(u) = u + o(u^2)$, on en déduit que

$$z_n = -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 3 Centrale 2

1. On étudie les suites réelles vérifiant la relation de récurrence

$$z_{n+2} = \frac{z_{n+1}}{n+1} + z_n \qquad (*)$$

On pose (α_n) la suite vérifiant $(*)$ et $(\alpha_0, \alpha_1) = (1, 1)$ et (β_n) celle vérifiant $(*)$ et $(\beta_0, \beta_1) = (0, 1)$.

   (a) Définir une fonction $Z(n, a, b)$ qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite (z_n) vérifiant $(*)$ et $(z_0, z_1) = (a, b)$.

   (b) Afficher les 20 premiers termes des suites (α_n) et (β_n). Que constate-t-on ?

   (c) Conjecturer la limite de la suite (α_n/β_n).

   (d) Calculer explicitement α_n et β_n.

   (e) Vérifier la conjecture sur α_n/β_n.

2. Pour tout $x > 0$, on définit la suite (u_n) par $u_0 = x$ et $\forall n,\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}}$ $(**)$.

   (a) Définir une fonction $U(x, n)$ qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite.

   (b) Définir une fonction $plotU(x)$ qui affiche pour $k \in [0, 99]$ la ligne polygonale reliant les points (k, u_k). Tracer la courbe pour $x = 1$, $x = 7$ et $x = 15$.

   (c) Conjecturer le comportement de (u_n) et justifier mathématiquement.

Corrigé

1. (a) On éfinit localement une liste à laquelle on ajoute les termes successifs de la suite.

```
def Z(n,a,b):
    l=[a,b]
    for k in range(n-1):
        l.append(l[k]+l[k+1]/(k+1))
    return(l)
```

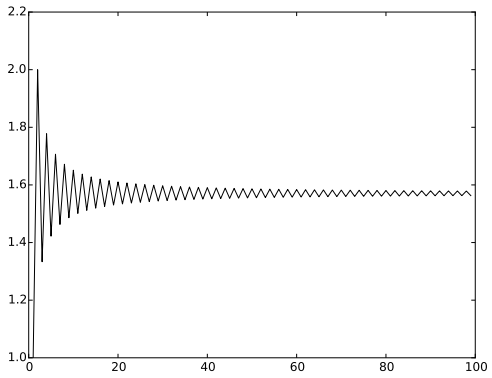
   (b) Je choisis de définir des listes `alpha` et `beta` contenant les 101 premiers termes des suites proposées puis d'afficher les 20 premiers.

```
alpha=Z(100,1,1)
beta=Z(100,0,1)

for i in range(20):
    print(alpha[i])

for i in range(20):
    print(beta[i])
```

   On constate que $\alpha_{2n} = \alpha_{2n+1}$ et que $\beta_{2n+1} = \beta_{2n+2}$.

   (c) On trace la ligne joignant les points $(n, \alpha_n/\beta_n)$ (pour $n \in [1, 100]$).

```
from matplotlib import pyplot as plt
plt.plot([n for n in range(1,100)],[alpha[n]/beta[n] for n in range(1,100)],'k')
plt.show()
```



Il semble y avoir convergence de la suite (α_n/β_n). La limite est entre 1.5 et 1.6 mais je ne l'interprète pas à ce niveau.

(d) Puisque l'on pense que $\alpha_{2n} = \alpha_{2n+1}$, on pense avoir (avec $(*)$) $\alpha_{2n+2} = \frac{2n+2}{2n+1}\alpha_{2n}$ ce qui permet de deviner (en itérant la relation) α_{2n}. On devine ainsi que

$$\forall n,\ \alpha_{2n} = \alpha_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$$

ce que l'on prouve aisément par récurrence.
Par le même processus, on montre que

$$\forall n,\ \beta_{2n+1} = \beta_{2n+2} = \frac{(2n+1)!}{4^n(n!)^2}$$

(e) On est maintenant amenés à distinguer suivant la parité de n. Nous nous contenton de traiter le cas impair (l'autre est similaire). On a

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} = \frac{16^n(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2}$$

Avec la formule de Stirling,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} \sim \frac{\pi n}{2n+1} \to \frac{\pi}{2}$$

On a donc (en traitant aussi le cas pair)

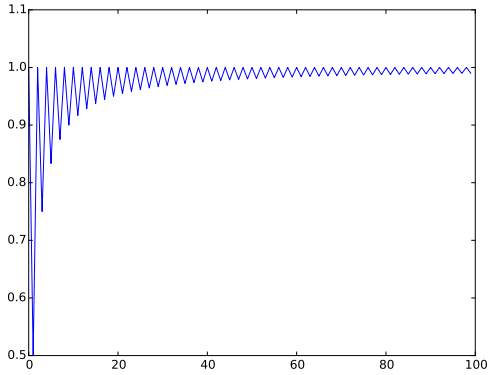
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\pi}{2}$$

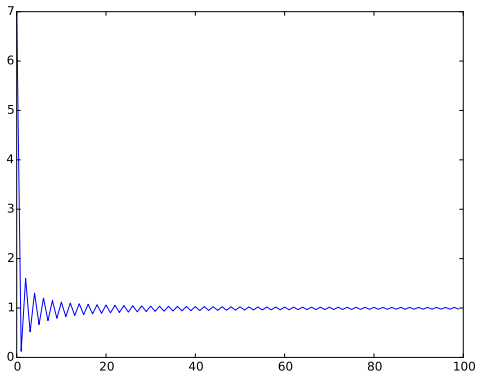
2. (a) La fonction crée une liste contenant la donnée initiale et la fait grossir en ajoutant au fur et à mesure les termes de la suite.

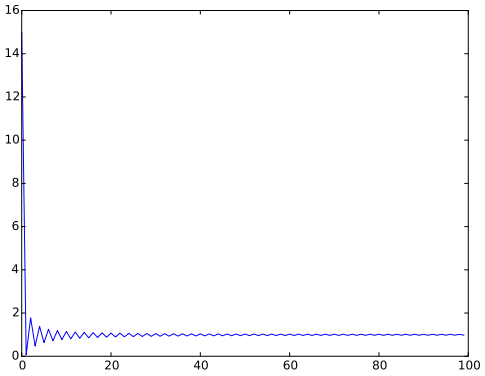
```
def U(x,n):
    l=[x]
    for i in range(n):
        l.append(1/(l[i]+1/(i+1)))
    return(l)
```

(b) Il suffit alors de tracer classiquement.

```
from matplotlib import pyplot as plt

def plotU(x):
    plt.plot([k for k in range(100)],U(x,99))
    plt.show()

plotU(1)
plotU(7)
plotU(15)
```







(c) Les exemples semblent suggérer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

On peut remarquer que si (z_n) est une suite vérifiant (*), alors la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{z_n}{z_{n+1}}$ vérifie (**). On va donc choisir (z_n) à partir de (α_n) et (β_n), connus, pour que $v_0 = x$ et alors, on aura $(u_n) = (v_n)$. Par exemple, si on pose $a = 1$, $b = \frac{1-x}{x}$ et $z = a\alpha + b\beta$. Alors z vérifie $(*)$ et $z_0 = a = 1$ et $z_1 = a + b = \frac{1}{x}$ et donc $v_0 = \frac{z_0}{z_1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Par récurrence immédiate, on a bien $(u_n) = (v_n) = \left(\frac{z_n}{z_{n+1}}\right)$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a\alpha_n + b\beta_n}{a\alpha_{n+1} + b\beta_{n+1}} = \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \frac{a\frac{\alpha_n}{\beta_n} + b}{a\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} + b}.$$

On a vu que $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ et donc $\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}\right)$ aussi. Il nous reste à étudier $\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\right)$. Or en étudiant les suites extraites d'indices pairs et impairs, on trouve qu'elle converge vers 1. Finalement, (u_n) converge vers $1 \times \frac{a\frac{\pi}{2}+b}{a\frac{\pi}{2}+b}$, i.e. 1.