EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1
Résoudre l'équation différentielle :
$$(t^2-4)x'+tx=2.$$

Exercice 2
Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' &= & x+2y-z \\ y' &= & 2x+4y-2z \\ z' &= & -x-2y+z \end{cases}$$

Exercice 3
Résoudre l'équation différentielle :
$$x''+2x'+x=4\cos t \text{ ch } t.$$

Exercice 4
Résoudre $y''+y'+y=\cos x$.

Exercice 5
Résoudre $y''-5y'+6y=\frac{e^x}{\text{ch}^2 x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Changement de variable
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. On considère l'ǫquation différentielle
$$(E_\alpha) \quad (1+x^2)y^{''}+xy^{'}-\alpha^2 y=0.$$
Résoudre (E_α) en faisant le changement de variable "$x=$sh$t$", ce qui signifie qu'on pose $g(t)=f(\text{sh}t)$, et on cherche une équation différentielle $(E^{'})$ telle que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il y a équivalence entre les énoncés : (i) f solution de (E), et (ii) g solution de $(E^{'})$.

Exercice 7
On note (E) l'équation différentielle $x(x+1)y''-(4x+1)y'+6y$.

1. Préciser la forme de l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que φ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si la dérivée de $\psi : x \mapsto \frac{1}{x^2}\varphi(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qu'on déterminera.
3. On note (E_1) l'équation différentielle $x(x+1)z'+3z=0$. Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Résoudre finalement (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8*
Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = f(\frac{1}{x}).$$

Un fois trouvée une nouvelle équation différentielle satisfaite par f solution du problème, on pourra effectuer le changement de variable $t = \ln x$.

Exercice 9*
On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' + 2y' + xy = 0$. Trouver les solutions de (E) développables en séries entières et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 10*
On considère l'équation différentielle (E) $\quad 2xy'(x) + y(x) - 3x\cos(x^{3/2}) = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution S sur $\mathbb{R}_+^*$ développable en série entière.
2. Trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire S.

Exercice 11*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + f$ tende vers 0 en $+\infty$. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 12*
On note (E) l'équation $y'' + (1 + \frac{2}{x})y' + (1 + \frac{1}{x})y = 0$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E). On pourra faire le changement d'inconnue $z = xy$.
2. Préciser les solutions qui sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13*
On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E_0) \quad (x^2 - 1)y''(x) - 2pxy'(x) + p(p+1)y(x) = 0.$$

1. Ecrire les trois premières dérivées (E_1), (E_2) et (E_3) de (E_0). Quelle est la forme de (E_k) pour $k \in \mathbb{N}$?
2. En déduire la forme des solutions générales de (E_0).

Exercice 14*

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(E) : y'' - 9y = a|x| + b$.
2. Le graphe d'une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ possède-t-il des droites asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 15*

1. Prouver que pour toutes matrices carrées M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\sum_{i=1}^{n} \det(C_1, \ldots, MC_i, \ldots, C_n) = \operatorname{tr}(M)\det(N)$$

   où $C_1 \ldots, C_n$ sont les colonnes de la matrice N.
   Pensez à la caractérisation de la fonction déterminant...

2. On s'intéresse à un système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$. On prend n solutions $X_1, \ldots, X_n$ et on note w leur wronskien. Soit $t_0 \in I$. Montrer que pour tout $t \in I$,

$$w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(x))dx\right).$$

   Que se passe -t-il si A est constante ?

Exercice 16*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle linéaire homogène

$$(E) \quad : \quad y'' + fy = 0,$$

où l'inconnue y est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Si y est une solution bornée de (E), montrer que $y'(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$.

2. En déduire que pour toute base (y_1, y_2) de l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E), au moins une des deux fonctions y_1 ou y_2 n'est pas bornée.
   On aura intérêt à considérer un wronskien.