DERIVATION ET INTEGRATION
POUR LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS VECTORIELLES

Exercice 1
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],E) \cap \mathcal{C}^1(]a,b[,E)$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer que :

$$\big(\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in]a,b[,\ \|f'(t)\| \leq k\big) \quad \Longrightarrow \quad \|\int_a^b f(t)dt\| \leq k\frac{(b-a)^2}{4}.$$

   On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[a,t]$ puis sur $[t,b]$.

2. Si $E = \mathbb{R}$, déterminer les fonctions f pour lesquelles on a égalité dans l'inégalité de la première question.

Exercice 2
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},E)$ où E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que si f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$, f' est bornée et si $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f^{(k)}(x)\|$ alors $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.
On pourra examiner $f(x+h)$ et $f(x-h)$ si $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3*
Soit $t \mapsto X(t)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X(0)$ soit une matrice de rotation. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ est une matrice de rotation,
(ii) il existe une application continue A de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A(t)X(t)$.

Exercice 4
Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ème de :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$,
2. $f_n :]-1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

Exercice 5
Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $I = [a,+\infty[$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur I, dérivable sur $]a,+\infty[$.
a. Soit $l \in \mathbb{R}$, $l > 0$. Démontrer que si $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = l$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
(On utilisera un réel k tel que $0 < k < l$.)
b. On suppose que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
c. On suppose que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 6
Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous, démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$a.\quad u_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+i}\ ; \qquad b.\quad u_n = n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i^2+(n-i)^2}\ ; \qquad c.\quad u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(n+i)}.$$