SERIES ENTIERES

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a. $\sum e^{\sin n} z^n$, b. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right) z^n$, c. $\sum \frac{1}{n^2+1} z^{2n}$,

d. $\sum\limits_{n\geq 1} (\ln n)^n z^n$, e. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{\ln n} z^n$, f. $\sum\limits_{n\geq 1} \left((n+1)^{1/n} - n^{1/(n+1)}\right) z^n$,

g. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt[3]{n}} z^n$, h. $\sum\limits_{n\geq 2} (\mathrm{sh}(\sqrt{\ln n}))^{-2} z^n$, i. $\sum \tan(\pi\sqrt{n^2+3n+2}) z^n$.

Exercice 2
Calculer le rayon de convergence R et la somme S des séries entières suivantes.

a. $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n n^2 x^{2n-1}$, b. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(n+\frac{1}{n}\right) x^{2n}$, c. $\sum \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$,

d. $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{x^{2n}}{n^2-1}$, e. $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$, f. $\sum n\mathrm{sh}n\ x^n$, g. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2^{(-1)^n} x^n}{n}$.

Exercice 3
Pour les fonctions f des exemples suivants où l'on donne $f(x)$, montrer que f est développable en série entière et donner son développement en série entière.

a. $\frac{x\mathrm{sh}\theta}{x^2-2x\mathrm{ch}\theta+1}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, b. $\sin^3 x$, c. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$ si $x \neq 0$, 1 sinon,

d. $\int\limits_0^x \sin(t^2)dt$, e. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}dt$, f. $(1+x)\ln(1+x)$,

g. $(\mathrm{Arcsin}x)^2$ (on pourra montrer que f' satisfait l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy = 2$ sur $]-1,1[$).

Exercice 4
Calculer les sommes des séries suivantes.

a. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$, b. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!}(-1)^n$, c. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 5
Soit $f : x \mapsto \cos(x)\mathrm{ch}(x)$. Exprimer f comme la somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. (Indication : passer en forme exponentielle.)

Exercice 6
Pour tout x réel, on note $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ si x non nul et $f(0) = \frac{1}{2}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et donner $f^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Exercice 7
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sigma_n \frac{x^n}{n!}$ avec , pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Trouver D l'ensemble de définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)dt$.

Exercice 8

1. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de f, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ par $f(z) = \frac{3z}{3+z}$.
2. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
3. La série entière obtenue converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
4. Soit $g : x \mapsto \frac{\sin x}{5+3\cos x}$, de la variable x réelle. Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) =$A $\mathrm{Im}(f(e^{ix}))$.
5. A l'aide de la première question, déterminer un développement en série de fonctions de g sous la forme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ et en déduire la valeur de $I_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9
Soit (a_n) la suite réelle telle que $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2\frac{a_n}{n+2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.
2. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Montrer que la somme f de cette série entière est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $(1-x)y' - (2x+1)y = 0$.
4. Résoudre cette équation sur $]-R, R[$ et expliciter f.

Exercice 10
Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{3n}{n+2}x^n$.

Exercice 11
On considère la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3/2$ et

$$\forall n \geq 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}(n+1)a_n$$

On considère aussi la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle. En déduire le rayon de convergence de f.
3. Déterminer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

Exercice 12
Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général $\frac{x^n}{n}\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$.