VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 2
Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de véhicules arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet numéro 1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, calculer $P(X = k | N = n)$.
2. En déduire la loi de probabilité de X.
3. Donner les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 3
Le nombre d'oeufs pondus par une poule en un mois est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre α.
Le nombre d'oeufs pondus par une cane en un mois est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre β.
On suppose que ces deux variables sont indépendantes.
Si le fermier ramasse n oeufs en un mois, quelle est la probabilité que k d'entre eux soient des oeufs de poule ?

Exercice 4
On a lancé 5000 fois une pièce de monnaie et on a obtenu 2600 fois pile.
Déterminer un intervalle tel que la probabilité p d'obtenir pile appartienne à cet intervalle avec une probabilité d'au moins 95%.

Exercice 5
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $Y = X^2 + 1$. Déterminer la loi de Y et son espérance.
2. Calculer $P(2X < Y)$.
3. Calculer la probabilité que X soit paire.
4. La probabilité que X soit impaire est-elle supérieure à celle de X paire ?

Exercice 6

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que Y sachant $(X = n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. Reconnaître la loi de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7*

On admet que si $0 \leq x < 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k.$$

Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p, des boules noires en proportion $q = 1-p$ ($p \in]0,1[$). On effectue des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à l'obtention de r boules blanches. Soit X le nombre de boules noires obtenues (avant la r-ème boule blanche).

1. Calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que l'on obtient presque sûrement r boules blanches.

3. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

4. Montrer la formule admise au début de l'exercice.

Exercice 8*

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $G_X(t) = \frac{1}{(2-t)^\alpha}$.

2. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(X = n)$ quand $n \to +\infty$ dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq \lambda + \alpha) \leq \frac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Exercice 9*

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

1. Justifier qu'on définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère A_n "n divise X". Montrer que $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants. En déduire une preuve probabiliste de :

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

3. Montrer que la probabilité qu'aucun carré différent de 1 ne divise X vaut $\frac{1}{\zeta(2s)}$.

Exercice 10*
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire N_n suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. La décomposition en facteurs premiers

$$\forall \omega \in \Omega, \quad N_n(\omega) = \prod_{i=1}^{v(n)} p_i^{X_{n,i}(\omega)}$$

(où $p_1 < p_2 < \cdots$ est la suite croissante des nombres premiers) définit des variables aléatoires $X_{n,i}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ (où $i \in v(n)$).

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(1, X_{n,i})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, v(n)]\!]$.

2. Donner une interprétation arithmétique de $\sum_{i=1}^{v(n)} \min(1, X_{n,i})$.

3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $D_n(\omega)$ le nombre de diviseurs premiers de l'entier $N_n(\omega)$. Calculer $\mathbb{E}(D_n)$. On note $h_n = \sum_{i=1}^{v(n)} \frac{1}{p_i}$. Donner un encadrement de $\mathbb{E}(D_n)$ utilisant h_n.

Exercice 11 Modèle de Galton-Watson**
On observe des virus qui se reproduisent tous selon la même loi avant de mourir : un virus donne naissance en une journée à X virus, où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}(X = k) = p_k$. On suppose $p_1 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$. On note f la fonction génératrice de X. On part du jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a donc X_1 virus, où X_1 suit la loi de X. Chacun de ces X_1 virus évolue alors indépendamment des autres et se reproduit selon la même loi avant de mourir : cela conduit à avoir X_2 virus au deuxième jour ; et le processus continue de la sorte. On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Calculer u_0 et u_1.

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Que peut-on dire de la limite de (u_n) ? Discuter selon la valeur de $E(X)$. Interpréter le résultat.