ISOMETRIE ET ENDOMORPHISMES SYMETRIQUES

Exercice 1
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. On note $\mathcal{E}$ sa base canonique : c'est une b.o.n.. On oriente $\mathbb{R}^3$ en choisissant $\mathcal{E}$ directe. Déterminer la nature de f dont la matrice représentative dans $\mathcal{E}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient r et R deux rotations et s une symétrie orthogonale. Etudier $s \circ r \circ s$, puis $r^{-1} \circ R \circ r$.

Exercice 3
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = S + iI_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est inversible.

Exercice 4
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^TA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que les valeurs propres de A^TA sont positives.
3. On note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres de A^TA. Montrer : $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.

Exercice 5
Soit E un espace euclidien et h un endomorphisme symétrique. Soient $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de h. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

1. Montrer que $\lambda_1 \leq (h(x)|x) \leq \lambda_n$.
2. Montrer que $(h(x)|x) = \lambda_1$ si et seulement si $h(x) = \lambda_1 x$.

Exercice 6
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{10} = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^T = A^TA$ et A est nilpotente.

1. Montrer que A^TA est nilpotente.
2. En déduire toutes les matrices A qui vérifient ces hypothèses.

Exercice 8
Déterminer toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + 4A = 5I_n$.

Exercice 9
Donner les matrices de rotations de $\mathbb{R}^3$ qui sont à coefficients entiers relatifs. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap O_n(\mathbb{R})$?

Exercice 10
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M{}^tM = {}^tMM$ et $M^2 + I_n = 0$. Montrer que $M \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11
Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$, $S_1,\dots,S_p$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = \sum_{k=1}^{p} S_k^2$.
On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.
2. Montrer : $S \in \mathcal{S}_n^+$.
3. Montrer : $S = 0 \iff (\forall k \in [\![1, p]\!],\ S_k = 0)$.

Exercice 12
On reprend les notations de l'exercice précédent. On note de plus $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

1. ${}^tASA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
2. $S \in \mathcal{S}_n^+ \Longrightarrow {}^tASA \in \mathcal{S}_n^+$,
3. $(S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})) \Longrightarrow {}^tASA \in \mathcal{S}_n^{++}$.

Exercice 13
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que
$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} (f(e_i)|e_i)$$
2. Montrer que si f est symétrique à valeurs propres positives alors $\forall x,\ (x|f(x)) \geq 0$.
3. Soient f, g symétriques à valeurs propres positives. Montrer que $0 \leq \mathrm{Tr}(f \circ g) \leq \mathrm{Tr}(f)\mathrm{Tr}(g)$.

Exercice 14
Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice symétrique S à valeurs propres > 0 telle que ${}^tA = SAS^{-1}$. *Indication : on pourra commencer par montrer que si S est symétrique à valeurs propres > 0, il existe une matrice symétrique T telle que $S = T^2$.*

Exercice 15
Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E. Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$ tel que
$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad (x|y) = 0 \Longrightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

1. Que peut-on dire de $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$?
2. En calculant $(f(e_i) + f(e_j)|f(e_i) - f(e_i))$ de deux manières différentes, montrer que
$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \|f(e_i)\|^2 = \alpha^2.$$
3. Que peut-on en déduire sur $\frac{1}{\alpha} f$?

Exercice 16
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les deux énoncés suivants :
(i) A est symétrique et ses valeurs propres sont réelles positives.
(ii) Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A =^t BB$.
Indication : pour (ii) $\Longrightarrow$ (i), on pourra calculer ${}^t(AX)X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.