

ESPACES PROBABILISES

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, "face" ne soit jamais suivi de "pile" ?
2. Si on admet que l'on peut lancer indéfiniment la pièce, quelle est la probabilité que "face" ne soit jamais suivi de "pile" ?

Exercice 2

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Exercice 3

On admet que dans une population, la probabilité p_n pour une famille d'avoir exactement n enfants est donnée par :

$$\forall n \geq 1, \quad p_n = \alpha p^n$$

où $p \in]0, 1[$ et $p(1 + \alpha) < 1$.

On suppose de plus que les naissances d'une fille ou d'un garçon sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité qu'une famille n'ait pas d'enfant ?
2. Pour $k \geq 1$, quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement k fille(s) ?
3. Etant donné une famille ayant au moins une fille, quelle est la probabilité qu'elle en ait au moins deux ?

Exercice 4

Deux pièces A et B sont reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue vers l'extérieur. Une guêpe initialement dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. Son trajet obéit aux règles suivantes :

- lorsqu'elle est en A au temps $t = n$, alors au temps $t = n + 1$ elle reste en A avec une probabilité $1/3$ ou elle passe en B avec une probabilité $2/3$,
- lorsqu'elle est en B au temps $t = n$, alors au temps $t = n + 1$ elle reste en B avec une probabilité $1/2$ ou elle retourne en A avec une probabilité $1/4$,
- lorsqu'elle est sortie, la guêpe ne revient plus.

Au temps $t = 0$ la guêpe est dans la pièce A. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

A_n l'événement "à l'instant $t = n$ la guêpe est dans la pièce A",

B_n l'événement "à l'instant $t = n$ la guêpe est dans la pièce B",

S_n l'événement "à l'instant $t = n$ la guêpe sort",

et a_n , b_n et s_n leurs probabilités respectives.

1. Calculer a_0 , b_0 , s_0 , a_1 , b_1 , s_1 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}$. En déduire s_n en fonction de n . Quelle est la probabilité que la guêpe puisse sortir ?

Exercice 5* Inégalités de Bonferroni

Le but est de préciser l'inégalité de Boole. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A_1, \dots, A_n des événements. Montrer que

1.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

2.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k).$$

Exercice 6* Premier lemme de Borel-Cantelli

Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que l'événement $\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$ est négligeable.

Exercice 7* Second lemme de Borel-Cantelli

1. Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que les événements A_n sont mutuellement indépendants. Montrer que l'événement $\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$ est presque sûr.
2. Application : une pièce de monnaie amène Pile avec la probabilité p ($\in]0, 1[$) et Face avec la probabilité $q = 1 - p$. On la lance une infinité de fois. Montrer que pour tout $m \geq 1$, il apparaît une infinité de séquences de m Piles consécutifs de façon presque sure.

Exercice 8**

Soient A_1, \dots, A_n des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère l'événement C_k "appartenir à A_i pour au moins k valeurs de i entre 1 et n ". Montrer que

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(C_k) \leq \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$