SERIES ENTIERES

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a. $\sum \left(\sqrt[3]{n^3+n+2} - \sqrt{n^2+1}\right) z^n$, b. $\sum \frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)} z^n$, c. $\sum (\sqrt{n})^n z^n$,

d. $\sum \left(e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}\right) z^n$, e. $\sum |\sin\left(\pi\sqrt[3]{n^3+1}\right)|^{1/3} z^n$, f. $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n+1}} z^n$, g. $\sum e^{-\mathrm{sh} n} z^n$.

Exercice 2
Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence R. Montrer que s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z_0^n$ soit semi-convergente, alors $R = |z_0|$.

Exercice 3
Pour $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{(an)!}{(bn)! n^{cn}} z^n$.

Exercice 4
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Quel est le rayon de convergence de $\sum \lambda^n a_n z^n$?

Exercice 5
Calculer le rayon de convergence R et la somme S des séries entières suivantes.

a. $\sum n^2 x^n$, b. $\sum \frac{n^2-n+4}{n+1} x^n$, c. $\sum \frac{1}{4n+3} x^{4n+3}$, d. $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$,

e. $\sum \frac{n^2+1}{n!} x^n$, f. $\sum \cos n\theta \, x^n$ et $\sum \sin n\theta \, x^n$ où $\theta \in \mathbb{R}$, g. $\sum \cos^2 n \, x^n$.

Exercice 6
Pour les fonctions f des exemples suivants où l'on donne $f(x)$, montrer que f est développable en série entière et donner son développement en série entière.

a. $\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$, b. $\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2$ si $x \neq 0$ et $\frac{1}{4}$ sinon, c. $\frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$, d. $\ln(1+x+x^2)$, e. $e^{x \mathrm{ch} a} \mathrm{ch}(x \mathrm{sh} a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7
Calculer les sommes des séries suivantes.

a. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{-n}$, b. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$, c. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 8
Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^3}{n!}$ converge et calculer sa somme. (On pourra décomposer X^3 dans la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ de $\mathbb{R}_3[X]$.)

Exercice 9
Résoudre l'équation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10
Convergence et somme de la série de terme génétal $\frac{(-1)^n}{(4n+1)4^n}$.
Indication : développer $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ *en série entière.*

Exercice 11
Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$?
2. Montrer
$$\int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 12
Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x\cos(t))dt$.

Exercice 13*
Soit f définie de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi^2/4]$ par

$$f(x) = (\arcsin(x))^2$$

1. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.

2. En déduire une expression de f sous forme de somme de série entière.

Exercice 14*
On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2. Etudier la convergence en $-R$ et R.

3. En notant S la somme de cette série entière, étudier la continuité de S.

4. Montrer : $(1 - x)S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 15* Mines-Ponts

1. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = (-1)^n$. Déterminer le rayon de convergence de la serie entière de terme général a_n. Déterminer la limite en 1 de la somme.

2. Soit une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum b_n$ converge. Que dire du rayon de convergence de la serie entière de terme général b_n ? On suppose que ce rayon est égal à 1. Montrer que $f \ : \ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue en 1.

Exercice 16* Inverse d'une fonction développable en série entière

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe, avec $a_0 = 1$. Montrer que son rayon de convergence est non nul si et seulement si il existe $q \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq q^n$.

2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(0) \neq 0$. Démontrer que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 17* Nombre de partitions d'un ensemble fini
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note π_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On notera que $\pi_0 = 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\pi_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_k$.

2. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{\pi_n}{n!} x^n$ est strictement positif. On note f la somme de cette série sur $]-R, R[$.

3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f. En déduire f, puis une expression des π_n (on trouvera une somme, mais qui ne dépend pas des autres π_k).