PROBABILITES

Exercice 1
2 joueurs A et B lancent 2 dés parfaits.
A commence. Si la somme des points qu'il obtient est 6, il a gagné.
Sinon, B lance les dés et si la somme des points qu'il obtient est 7, il a gagné.
Sinon, A rejoue et ainsi de suite.
Préférez-vous être A ou B ?
Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?

Exercice 2
On dispose de deux urnes U_1 et U_2. U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires et U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On choisit une urne au hasard, et on fait un tirage. On note la couleur de la boule et on la remet dans l'urne d'où elle vient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon, le tirage se fait dans l'urne U_2. On note B_n l'événement : "la boule tirée au rang n est blanche". Déterminer $P(B_n)$.

Exercice 3
Une urne contient au départ une boule blanche. On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce équilibrée. Chaque fois que l'on obtient "face", on rajoute une boule noire dans l'urne, et la première fois que l'on obtient pile, on tire au hasard une boule dans l'urne et on arrête le jeu. Quelle est la probabilité de sortir la boule blanche ?

Exercice 4
Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés $D1$ et $D2$.
La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.
Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé $D1$ a 4 faces rouges et 2 blanches, le dés $D2$ a 2 faces rouges et 4 blanches. L'expérience est la suivante :

- On commence par jeter la pièce.
- Si on obtient pile, on choisit le dé $D1$, sinon on choisit le dé $D2$, choix définitif pour la suite.
- Ensuite, on jette plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, on note la couleur obtenue.

On nomme les événements suivants :

- $D1$ est l'événements "on joue avec le dé $D1$",
- $D2$ est l'événements "on joue avec le dé $D2$",
- $\forall n \in \mathbb{N}$, R_n est l'événement "on a obtenu une face rouge au n-ème lancer du dé choisi".

1. Calculer $P(R_1)$.
2. Calculer $P(R_1 \cap R_2)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{2^n+2}{3^{n+1}}$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P_{R_1 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1})$.
4. Calculer $P_{R_1 \cap R_2}(D_1)$, puis de manière générale, pour tout entier naturel non nul n, montrer que
$$P_{R_1 \cap \cdots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé $D1$ ou sur le fait d'avoir une face rouge au lancer suivant ?