ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1
Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E. La norme euclidienne associée est notée $\|.\|$. Prouver

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}.$$

Exercice 2
$(E, (.|.))$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

1. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall x \in E, \quad (x|u(x)) = 0$,
   (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \quad (y|u(x)) = -(x|u(y))$,
   (iii) la matrice de u relativement à une base orthonormée de E est antisymétrique.
   Si u vérifie (i), (ii) ou (iii), on dit que u est antisymétrique.

2. Montrer que le spectre d'un endomorphisme antisymétrique est soit vide soit le singleton de l'élément 0. En déduire qu'un endomorphisme antisymétrique non nul de E n'est jamais diagonalisable.

3. Soit u un endomorphisme antisymétrique. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Ker} u)^{\perp}$, que le rang de u est pair (étudier la restriction de u à $\mathrm{Im}(u)$) et que u^2 est diagonalisable. Que dire des valeurs propres de u^2 ?

4. Soit $(a, b) \in E^2$. On définit φ sur E par : $\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (x|a)b - (x|b)a$.
   Montrer que φ est un endomorphisme antisymétrique de E.

5. Lorsque la dimension de E est 3, prouver, pour tout endomorphisme antisymétrique u l'existence d'un unique vecteur b tel que
   $$\forall x \in E, \qquad u(x) = b \wedge x.$$

Exercice 3
Soit A symétrique réelle d'ordre n. Montrer que $|\det(A + 2iI_n)| \geq 2^n$.

Exercice 4
Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

1. Montrer qu'il existe D symétrique réelle positive telle que $D^2 = A$.

2. Montrer que $0 \leq \mathrm{Tr}(AB)$.

Exercice 5

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifant $A^p = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifant $({}^tM + M)^p = 0$. Que peut-on dire sur M ?

Exercice 6
Donner les caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans une base orthonormée directe par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ puis } \quad N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7*
Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. Montrer que

$$0 \leq \operatorname{Tr}(AB) \leq \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B).$$

Exercice 8*
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M^T M = I_n\}$ n'est pas une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{M}^T M = I_n\}$, notée $U_n(\mathbb{C})$, est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 9*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices dont le spectre (réel) est inclus dans $\{0\}$.

1. Montrer que $\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
2. Cette inégalité est-elle optimale ?

Exercice 10* Mines-Ponts
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 11* Mines-Ponts
Soit E un espace euclidien de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *matrice de Gramm* associée la matrice G de coefficient générique $g_{i,j} = (u_i|u_j)$.

1. Exprimer G en fonction de la matrice M des u_i dans la base B.
2. Montrer que $\det(G) \geq 0$ et qu'il y a nullité si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée.
3. Généraliser ce résultat pour une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ avec $p \leq n$.

Exercice 12* Autour du théorème de Riesz

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$P(0) = \int_0^1 P(t)A(t)dt.$$
Montrer que A est de degré n.
Pour ce dernier point, on pourra raisonner par l'absurde et considérer XA.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,
$$P(0) = \int_0^1 P(t)A(t)dt.$$

Exercice 13* Adjoint en dimension infinie

1. On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$. Pour toute $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on note $\phi(f)$ la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad \phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

   Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et montrer qu'il admet un adjoint que l'on précisera.

2. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Montrer que $P \mapsto P(0)$est un endomorphisme de E ne possédant pas d'adjoint.

Exercice 14*
Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si et seulement si pour toute matrice P orthogonale, PAP^{-1} est à diagonale nulle.