ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1
Soit $(.|.)$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Soit u un endomorphisme de E.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application définie par $\langle x|y\rangle = (u(x)|u(y))$ constitue un produit scalaire sur E.

Exercice 2

1. Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A)^2 \leq n\ \mathrm{tr}({}^tAA)$, et décrire le cas d'égalité.
2. Même question avec $\mathrm{tr}(A^2) \leq \mathrm{tr}({}^tAA)$.

Exercice 3
Dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, on note respectivement S_0 et A les sous-espaces des matrices symétriques de trace nulle et antisymétriques.
Montrer que S_0, $\mathrm{Vect}(I)$ et A sont en somme directe orthogonale et que la somme des trois fait $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4
Soit E l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $2x - 3y + 5z = 0$.

Exercice 5
Soient E un espace euclidien de dimension 4 et une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq 4}$ de E. Soient $u = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $v = 2e_1 + 3e_4$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

1. Déterminer $F^{\perp}$.
2. Donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p sur F.

Exercice 6

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-|x|}dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Etablir l'existence puis chercher en quel point est atteint le minimum de
$$f(a, b, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-|x|}dx$$
lorsque (a, b, c) décrit $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7
Soit $(E,(.|.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad (u(x)|x) = 0.$$

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $(u(x)|y) = -(x|u(y))$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Ker}\ u)^{\perp}$.
3. Montrer qu'il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$
avec $A \in GL_k(\mathbb{R})$, où $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.
4. Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 8
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ et on le munit du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad < f|g >= \int_0^1 [f(x)g(x) + f'(x)g'(x)]dx.$$

On note $V = \{f \in E \mid f'' = f\}$, $W = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et
$H = \{f \in E \mid f(1) = 1 \text{ et } f(0) = \mathrm{ch}(1)\}$.

1. Soient f dans V et g dans E. Montrer que $< f|g >= f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$.
2. (a) Calculer $<\mathrm{sh}|\mathrm{ch}>$, $\|\mathrm{sh}\|^2$ et $\|\mathrm{ch}\|^2$.
   (b) Montrer que pour tout f dans V et tout g dans W, on a $< f|g >= 0$.
   (c) Montrer que (sh,ch) est libre dans E, donner la dimension de V et montrer que (sh,ch) est une base de V.
3. Soit f dans H. On pose Γ le projeté orthogonal de f sur V.
   (a) Calculer $< f|\mathrm{sh}>$ et $< f|\mathrm{ch}>$.
   (b) Donner les coordonnées de Γ dans (sh,ch).
4. Calculer $m = \mathrm{Inf}\{\int_0^1 (f^2 + f'^2) \mid f \in H\}$.
5. Montrer que l'orthogonal de V est W.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}$. $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose

$$\Phi(P,Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)dx + P(0)Q(0).$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire.
2. (a) Ecrire la matrice associée à Φ dans la base $(1, X, X^2)$.
   (b) Déterminer une b.o.n. (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.