ESPACES VECTORIELS NORMES

Exercice 1
Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $(x, y) \in E^2$; montrer :

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$

Exercice 2
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$, $N_1, \ldots, N_p$ des normes sur E, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, et $N : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \qquad N(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k N_k(x).$$

Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 3
Soient E l'ensemble des applications $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et telles que $f(0) = 0$, N_∞, $N'_\infty : E \to \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$\forall f \in E, \qquad N_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad N'_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$

1. Montrer que N_∞ et N'_∞ sont des normes sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $N_\infty(f) \leq N'_\infty(f)$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour toute $f \in E$, $N'_\infty(f) \leq \alpha N_\infty(f)$.

Exercice 4
Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On considère l'application N_f définie par :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P & \mapsto & N_f(P) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)P(x)|. \end{array}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que N_f soit une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 5
Soit A une partie de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et O un ouvert de E.
Montrer que $A + O$ est un ouvert de E.

Exercice 6
Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire usuel, $\langle A, B\rangle \mapsto \mathrm{Tr}(({}^tA)B)$.
On note $\|.\|$ la norme associée : $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle$.
On note $O_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales.
Si $A \in E$, et si P est une partie non vide de E, la distance de A à P est, par définition,

$$d(A,P) = \inf_{B\in P} \|A - B\|.$$

Si P et Q sont deux parties non vides de E, la distance entre P et Q est :

$$d(P,Q) = \inf_{A\in P, B\in Q} \|A - B\|.$$

On a aussi (et on l'admettra)

$$d(P,Q) = \inf_{A\in P} d(A,Q).$$

1. Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$, calculer $\|A\|$.
2. Démontrer que $O_3(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que l'application $M \mapsto \|M\|$, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est continue.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe $U \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $d\left(A, O_3(\mathbb{R})\right) = \|A - U\|$.
5. Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(M) = d\left(M, O_3(\mathbb{R})\right)$.
   (a) Soient M et N dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que
   $$\forall U \in O_3(\mathbb{R}), \qquad d\left(M, O_3(\mathbb{R})\right) \leq \|N - U\| + \|N - M\|,$$
   puis que :
   $$d\left(M, O_3(\mathbb{R})\right) \leq d\left(N, O_3(\mathbb{R})\right) + \|N - M\|.$$
   (b) En déduire que Φ est continue.
6. Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $r \in \mathbb{R}^+$, on pose
   $$B_r = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \|M\| \leq r\}.$$
   (a) Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que $d\left(P, O_3(\mathbb{R})\right) = d\left(P \cap B_r, O_3(\mathbb{R})\right)$.
   (b) Démontrer qu'il existe $A \in P$ telle que $d\left(P, O_3(\mathbb{R})\right) = d\left(A, O_3(\mathbb{R})\right)$.

Exercice 7
Montrer que la trace possède un maximum et un minimum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et déterminer ces extréma.