REDUCTION 2

Exercice 1
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(A)^T = P(A^T)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. $P^k(A)$ vaut-il $P(A^k)$? $P(A)^k$? Ni l'un ni l'autre ?

Exercice 2
Soit Φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par
$$\Phi(M) = \mathrm{Tr}(M)I_n + M$$

1. Expliquer brièvement pourquoi Φ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.
3. Donner un polynôme annulateur de Φ de degré 2.
4. Φ est-il diagonalisable ?
5. Φ est-il inversible ? Si oui, donner $\Phi^{-1}(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3
Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 5$ et $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 4
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ tel que $f^3 + f^2 + f = 0$.

1. f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
2. Calculer la trace de f.

Exercice 5
Déterminer toutes les matrices $A \in GL_3(\mathbb{R})$, de trace égale à 7 et vérifiant $A^3 - 5A^2 + 6A = 0$.

Exercice 6
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? *Indication : calculer* $3C_1 + C_2$. Quels sont ses éléments propres ?
2. Donner une matrice R telle que $R^2 = A$.
3. Toute matrice R vérifiant $R^2 = A$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 7*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 8*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un élément de $\mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que si $P(f) = 0$ alors $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est diagonalisable, A^2 l'est aussi.
2. En s'intéressant à la matrice qui a un unique 1 dans le coin supérieur droit et des 0 partout ailleurs, montrer que la réciproque est fausse.
3. Donner une condition de diagonalisabilité utilisant un polynôme annulateur.
4. Montrer que si A^2 est diagonalisable et inversible alors A est diagonalisable.
5. On suppose A non inversible. Montrer que si A^2 et A sont diagonalisables, $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}A^2$.

Exercice 10*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que l'application φ est continue, avec $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array}$.
2. Montrer que l'application ψ n'est pas continue, avec $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \mapsto & \pi_A \end{array}$.

Exercice 11*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$. On pose $B = AP(A)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Exercice 12*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'endomorphisme f_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f_A(X) = AX$.

1. Déterminer le rang de f_A.
2. Trouver une CNS pour que f_A soit diagonalisable.
3. Calculer $\mathrm{Tr}(f_A)$.
4. Calculer χ_{f_A}.

Exercice 13*
K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que la dérivation de $\mathbb{K}[X]$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul.
2. Qu'en est-il de la dérivation de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide ?
3. Même question avec la dérivation sur $\mathbb{F}_p[X]$, où p est un nombre premier ?

Exercice 14*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = BA$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.
Indication : si P est scindé à racines simples, P et P' sont premiers entre eux.

Exercice 15**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est semi-simple lorsque tout sous-espace vectoriel F de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

1. Montrer que si u est un endomorphisme diagonalisable de E alors u est semi-simple.
2. On suppose que π_u est irréductible.
   (a) Soit F un sous-espace de E stable par u. On suppose qu'il existe $x \in E \setminus F$. On pose $E_x = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que F et E_x sont en somme directe.
   (b) Montrer que u est semi-simple.
3. Montrer que si π_u est produit de polynômes irréductibles deux à deux distincts alors u est semi-simple.
4. Supposons qu'il existe P irréductible tel que $P^2 \mid \pi_u$. Montrer que u n'est pas semi-simple.

Exercice 16**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. On note $N_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ est nilpotente}\}$.
   Montrer que P définit une bijection de N_n dans lui même.
   On pourra montrer, pour l'injectivité, qu'il existe deux polynômes Q et R tels que
   $Q \circ P = X + X^n R$.
2. Montrer que $R(X) = X^3 + X$ induit une surjection sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même.