STRUCTURES ALGEBRIQUES

Exercice 1
On pose
$$G = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $SO(2)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 2
Soit $(G, \times)$ un groupe d'élément neutre e. On suppose que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3
Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 4
Soit p un nombre premier et $G_p = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ z^{p^k} = 1\}$.

1. Montrer que $(G_p, \times)$ est un groupe.
2. Montrer que G_p possède un nombre infini de sous-groupes.

Exercice 5 Théorème de Lagrange
Soit G un groupe fini. Si H est un sous-groupe de G, on définit la relation : $x\mathcal{R}y \iff x^{-1}y \in H$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et que la classe d'équivalence de tout élément $x \in G$ est
$$xH = \{xh \mid h \in H\}.$$
2. Montrer que les classes d'équivalence pour cette relation ont toutes le même cardinal, égal à celui de H.
3. En déduire que le cardinal de H divise celui de G.
4. En déduire la preuve de
$$\text{Si } x_0 \in G \text{ est d'ordre fini } p \quad \text{alors} \quad p \mid \text{card}(G).$$

Exercice 6*
Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*)$ sont isomorphes, mais qu'il n'en est pas de même pour $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*)$, ni pour $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}_+^*)$.
Pour les deux derniers points, on pourra s'intéresser à des équations du type $x^2 = a$, avec a bien choisi.

Exercice 7*
Démontrer que le centre du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ (i.e. l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ qui commutent avec tous les élements de $\mathcal{S}_n$) est réduit à $\{Id\}$ pour $n \geq 3$.
On pourra raisonner par l'absurde et supposer que le centre possède un élément différent de l'identité.

Exercice 8*

1. Soit $(G, \times)$ un groupe monogène. On note e son élément neutre. Montrer que les sous-groupes H de G sont aussi monogènes.
On pourra noter a un générateur de G et s'intéresser à $L = \{n \in \mathbb{Z} \mid a^n \in H\}$.
2. En déduire que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.

Exercice 9*

1. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est le seul sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n.
2. Soit G un groupe cyclique de cardinal n. Soit d un diviseur de n. Montrer que G possède un unique sous-groupe de cardinal d et que celui-ci est cyclique.

Exercice 10*
Soit $(G,.)$ un groupe à 4 éléments. Démontrer qu'il est isomorphe ou bien à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou bien à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 11*
Soit $(G,*)$ un groupe qui ne possède qu'un nombre fini de sous groupes. Montrer que G est fini.

Exercice 12*

1. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes et $x \in G$ d'ordre n. Montrer que $f(x)$ est d'ordre fini p et que p divise n.
2. Quels sont les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$? Ceux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?
3. Cas général : quels sont les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, avec m et n entiers naturels non nuls, supérieurs ou égaux à 2 ?

Exercice 13
Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un élément a de A est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. Montrer que l'ensemble I des éléments nilpotents de A est un idéal.

Exercice 14

1. Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}$ et A. On note $\mathbb{Q}(A)$ ce sous corps.Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, on le note plutôt $\mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.
2. Décrire le sous-corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. On montrera que c'est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 4.

Exercice 15
Utiliser la mise sous forme canonique pour résoudre dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ l'équation

$$x^2 + x + \overline{17} = \overline{0}.$$

Exercice 16
Résoudre dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} 5x + 2y &= \overline{3} \\ 2x + 4y &= \overline{6} \end{cases}$$

Exercice 17*
Si A est un anneau commutatif, on note $A[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans A.

1. Ici, $A = \mathbb{Z}$. On note
$$I = \{2P + XQ \mid (P,Q) \in \mathbb{Z}[X]^2\}.$$
   (a) Montrer que I est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Montrer que I n'est pas un idéal principal, i.e. qu'il n'existe pas $R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $I = R\mathbb{Z}[X]$.
2. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que tous les idéaux de $A[X]$ soient principaux est que $A = \{0\}$ ou que A soit un corps.

Exercice 18*
Soit p un nombre premier. On sait que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, noté $\mathbb{F}_p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ des matrices carées de taille n à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ inversibles, est fini et déterminer son cardinal.