INTEGRALES A PARAMETRE

Exercice 1
On s'intéresse à $f : (x,t) \mapsto \ln(1 + xe^{-t})$.

1. Montrer que pour $x \in]-1,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose $F : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} f(x,t)dt$. Par ce qui précède, F est définie sur $]-1,+\infty[$. Montrer que F est continue sur $]-1,+\infty[$.
3. Montrer que F est développable en série entière sur $]-1,1[$.
4. Que vaut $F(1)$?

Exercice 2
On considère la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de f.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' - y = -\frac{k}{\sqrt{x}}$ avec $k = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
5. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
6. Etudier le comportement de f en $+\infty$.
7. Donner l'allure du graphe de f.

Exercice 3
Soit $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t \, dt$.

1. Trouver le domaine de définition de f, noté D.
2. Etudier la continuité de f sur D.
3. Etudier le comportement de f en $+\infty$.
4. Etudier la dérivabilité de f sur D et calculer sa dérivée (quand elle existe).
5. Calculer, pour $x \in D$, $xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x}$.
6. Expliciter f.

Exercice 4
Pour tout x réel on pose
$$z(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt.$$

1. Montrer que z est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que z est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad z'(x) = -\frac{1}{2(x+i)} z(x).$$
4. Montrer qu'il existe une unique fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et une unique fonction θ de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad z(x) = f(x) e^{i\theta(x)}.$$
5. Exprimer f et θ en fonction de $z(0) = \lambda$.

Exercice 5
On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^{t^2}} dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $]-1, +\infty[$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.
4. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et exprimer simplement les coefficients de son développement en série entière.