COMPACITE ET ESPACES VECTORIELS NORMES DE DIMENSION FINIE

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=x^3-3x(1+y^2)$. On note : $\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$. Etablir que la fonction f admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{U}$. Les déterminer.

Exercice 2
Une matrice carrée $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\in[0,1]$ et si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la somme des coefficients de la i-ème ligne de A est égale à 1.
Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3
Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite (A^n) converge vers une matrice P.

1. Montrer que P et A commutent et que $PA=AP=P$.
2. Montrer que P est une matrice de projection et que $\mathrm{Im}(P)=\mathrm{Ker}(A-I_p)$ et que $\mathrm{Ker}(P)=\mathrm{Im}(A-I_p)$.

Exercice 4
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit A (resp B) une partie de E (resp F). On munit $E\times F$ de la norme produit.

1. On suppose A et B connexes par arcs, montrer que $A\times B$ est connexe par arcs.
2. On suppose $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$ et $A\times B$ connexe par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs. Que se passe-t-il si $A=\emptyset$ et $B\neq\emptyset$?

Exercice 5
Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite (A^n) converge vers B. Que peut-on dire de B ?

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et (u_n) et (v_n) deux suites de vecteurs telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \text{ est colinéaire à } v_n,\quad \lim_{n\to+\infty}u_n=l_u,\ \lim_{n\to+\infty}v_n=l_v.$$

Montrer que l_u et l_v sont colinéaires (on pourra raisonner par l'absurde et compléter (l_u,l_v) en une base de E).

Exercice 7
On pose $A=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i\neq x_j \text{ pour tout } i\neq j\}$. Montrer que A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, on note $\Omega_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg(A)} \geq \text{p}\}$ et $F_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg(A)} \leq \text{p}\}$.

1. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, F_p est fermé.
2. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, Ω_p est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit H un hyperplan de E.

1. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $E \setminus H$ est connexe par arcs.

Exercice 10* Théorème des compacts emboîtés
Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout compact K on note $\delta(K)$ le diamètre de K défini par $\delta(K) = \max\limits_{(x,y) \in K^2} \|x - y\|$.
Soit (K_n) une suite de compacts emboîtés, non vide dont le diamètre tend vers 0, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (K_n \neq \emptyset \quad \text{et} \quad K_{n+1} \subset K_n) \quad \text{et} \quad \delta(K_n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n = \{x\}$.

Exercice 11*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que l'application φ est continue, avec $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array}$.
2. Montrer que l'application ψ n'est pas continue, avec $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \mapsto & \pi_A \end{array}$.

Exercice 12*
On note E l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

1. On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer $\overline{F} = \overline{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 2$, a-t-on $\overline{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 13 Théorème de Baire**
On se place dans un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
On pourra construite une suite de boules ouvertes adaptées et utiliser le théorème des compacts emboîtés.