INTEGRABILITE ET SUITES OU SERIES DE FONCTIONS

Exercice 1
Montrer que la suite $\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} dx\right)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}$. Prouver l'existence de $I_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$ et étudier la suite (I_n).

Exercice 3
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa somme.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que f.
3. Comparer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer ce résultat.

Exercice 4
Montrer que, pour tous a et b dans $]0, +\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

Exercice 5
Soit g une application définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)sin(t)dt.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} g(u+n\pi)\sin(u)du$.
2. Montrer que (u_n) converge vers 0.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 6

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Exercice 7
Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$, $f_n : x \mapsto \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$.

1. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $U_n = n\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
2. Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

Exercice 9
Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \theta \mapsto \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) = \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.
2. Les séries $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(0)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(\pi)$ sont-elles convergentes ? Si oui, quelle est leur somme ?
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S la somme.
4. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de S'.
6. On s'intéresse à $F :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta+x^2)d\theta$.
   (a) Montrer que F est bien définie.
   (b) Pour $x \in]-1,1[$, calculer $F(x)$.

Exercice 10
On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\, dt$$

Déterminer la limite de (u_n) puis la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 11
Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2}du$ converge, puis la calculer.

Exercice 12
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^x dx$. On pourra faire le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{n}}$.

Exercice 13
Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x e^{-\sqrt{n}x}$.

1. Donner le domaine de définition de f, on le note I. Etudier la continuité de f.
2. f est-elle intégrable sur I ? Montrer que $\int_I f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.