INTEGRALES GENERALISEES, FONCTIONS INTEGRABLES

Exercice 1
Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$, b. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^{-x} \sin x dx$, c. $\int_0^{+\infty} \frac{2\text{Arctan } x - \pi}{2\sqrt{x}} dx$, d. $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^{3/2}} dx$.

Exercice 2
Convergence et calcul des intégrales suivantes :

a. $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^5+1)^{3/2}} dx$, b. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$, c. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{1}{x-\alpha} dx$, $\alpha \in]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$.

Exercice 3
Soit $g \in \mathcal{C}([0,+\infty[, [0,+\infty[)$ une fonction périodique de période $T > 0$. Montrer que la fonction $f : t \mapsto g(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-t} dt = \frac{1}{1-e^{-T}} \int_0^T g(y)e^{-y} dy.$$

Application : calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x| dx$.

Exercice 4
Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}$.

1. Montrer que $\int_0^1 f$ converge.
2. Calculer $\int_0^1 f$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 5
Quelle est la nature de

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

Donner sa valeur si elle est convergente.

Exercice 6
Existence et calcul de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx.$$

Exercice 7
Déterminer la nature de

$$I = \int_1^{\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Exercice 8
On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt$.

1. Etudier la convergence de I, puis prouver que J est de même nature que I et que $J = I$.
2. Calculer $I + J$, puis déterminer la valeur de I et de J.