TOPOLOGIE ET CONTINUITE

Exercice 1
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n. Soit X une partie dense de E ($\overline{X} = E$). Soit f une fonction continue de E vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) = 0$. Montrer que pour tout $x \in E$, $f(x) = 0$.

Exercice 2
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : A \to F$ une application continue, où A est une partie de E. Montrer que l'image par f d'une partie dense dans A est dense dans $f(A)$.

Exercice 3
Soit A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En écrivant $A = UJ_rV$ où U et V sont des matrices inversibles et J_r l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de coefficient d'indice i, j égal à 1 si $i = j \leqslant r$ et 0 sinon, montrer que A est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ tous de rang $\min(n, p)$.
Etudier le cas particulier $n = p$.

Exercice 4
Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé E est soit un fermé de E, soit dense dans E.

Exercice 5
On se place dans l'espace des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme infinie. Notons $a = (a_n)$ la suite constante égale à 1 et $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0. Déterminer la distance de a à $\mathcal{C}_0$.

Exercice 6
On se place dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ et on pose

$$\varphi_1 \ : \ f \mapsto f(1) \quad \text{et} \quad \varphi_2 \ : \ f \mapsto \int_0^1 f.$$

φ_1 et φ_2 sont-elles continues pour $\|.\|_\infty$? Pour $\|.\|_1$?

Exercice 7

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ continue.
   (a) Montrer que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
   (b) $\mathrm{Im}(f)$ est-il un sous-espace vectoriel fermé de F ? On pourra s'intéresser à $f : g \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x g\right)$ dans $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - \sqrt{\frac{1}{n}}$.
2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et p un projecteur continu de E. Montrer que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels fermés de E.

Exercice 8*
On note $E = \mathcal{C}([0,1])$. On note E_∞ cet espace muni de la norme $\|.\|_\infty$ ($\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$), et E_1 cet espace muni de la norme $\|.\|_1$ ($\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$).
On note u l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ u(f)(x) = \int_0^x tf(t)dt.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que l'application v de E_∞ vers E_1, qui à f associe $u(f)$ est continue.
3. Montrer que l'application w de E_1 vers E_∞, qui à f associe $u(f)$ est continue.

Exercice 9*
On note ℓ^1 l'espace des suites réelles $x = (x_n)$ telle que la série $\sum x_n$ converge absolument. On munit ℓ^1 de la norme :

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $e^{(n)}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice n qui vaut 1. Montrer que $F = \text{Vect}(e^{(n)},\ n \in \mathbb{N})$ est dense dans E.
2. Soit $a = (a_n)$ une suite réelle bornée. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi_a & : & \ell^1 & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \end{array}$$
est une forme linéaire continue sur ℓ^1.
3. Réciproquement, montrer que toute forme linéaire continue sur ℓ^1 est de la forme φ_a avec a une suite réelle bornée.

Exercice 10*
On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
1. Quelle est l'adhérence de F dans $(E, \|.\|_\infty)$?
2. Quelle est l'adhérence de F dans $(E, \|.\|_1)$?

Exercice 11*
On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme N_∞ et on considère l'ensemble $\mathcal{A}$ défini par :

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} f \geqslant 1 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie fermée de E.
2. Soit f un élément de $\mathcal{A}$. Montrer $N_\infty(f) > 1$.
3. Expliciter $\inf\limits_{f\in\mathcal{A}} N_\infty(f)$.

Exercice 12**
Soient E un espace vectoriel normé, $E \neq \{0\}$, φ une forme linéaire continue sur E, $\varphi \neq 0$ et $H = \ker(\varphi)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont sont deux à deux équivalentes :
(i) $\exists a \in E$, ($\|a\| = 1$ et $|||\varphi||| = |\varphi(a)|$)
(ii) $\forall x \in E$, $\exists h \in H$, $d(x,H) = \|x - h\|$
(iii) $\exists x \in E\backslash H$, $\exists h \in H$, $d(x,H) = \|x - h\|$.