SERIES NUMERIQUES

Exercice 1
Déterminer la nature de la série de terme général :

a. $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$, **b.** $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$, **c.** $n^{-\ln(\ln n)}$, **d.** $n^{-(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$, **e.** $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$,

f. $\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^n$, **g.** $\frac{2^{(n^2)}}{n^{(2^n)}}$, **h.** $n^{(n^a)}-1$ avec $a\in\mathbb{R}$, **i.** $\frac{3^{(2^n)}}{2^{(3^n)}}$, **j.** $\frac{1}{\binom{np}{n}}$.

Exercice 2
Déterminer la nature de la série de terme général :
a. $\left(1-\frac{n}{\ln n}\right)^{-n}$, **b.** $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$, **c.** $\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$, **d.** $(-1)^n n^{-(1+n^a)}$ où $a\in\mathbb{R}$,

e. $(-1)^n e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$, **f.** $\frac{(2n)!}{n!a^n n^n}$ où $a\in\mathbb{R}_+^*$, **g.** $\frac{(n!)^a n^{bn}}{((2n)!)^c}$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 3
Soit (u_n) une suite de réels positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $v_n=\frac{u_n}{1+u_n^2}$.
a. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.
b. Montrer que si $\sum u_n$ diverge et (u_n) est majorée alors $\sum v_n$ diverge.
c. Donner un exemple de suite (u_n) telle que $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

Exercice 4
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 5
Montrer que les séries de termes généraux suivants convergent et calculer leurs sommes :

a. $x^n\cos(n\theta)$ avec $x\in]-1,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$, b. $\frac{\sin nx}{2^n\cos^n x}$ pour $n\geq 1$ et avec x réel tel que $\frac{1}{|2\cos x|}<1$,

c. $\ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{(\ln n)(\ln(n+2))}\right)$, pour $n\geq 2$, d. $\frac{(-1)^n}{3^n}\cos^3(3^n\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 6
Convergence de la série de terme général $\ln(\text{th } n)$.

Exercice 7
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.

1. Etudier la convergence de $\sum u_n$.
2. Expliciter la somme de la série.

Exercice 8
Discuter selon les valeurs du réel a la convergence de la série de terme général

$$u_n = (\mathrm{ch}(1/n))^{-n^a}.$$

Exercice 9
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\right)^{-\frac{1}{2\ln n}}.$$

Exercice 10
Soient a et b deux réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que $\sum u_n$ converge.
2. Dans ce cas, calculer la somme.

Exercice 11
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \ln n - n + \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-1/k}$.
Trouver la suite (x_n) telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.
En déduire que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 12
Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Exercice 13
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Trouver un équivalent de (u_n) en $+\infty$.

Exercice 14
Etudier les séries de terme général u_n et $(-1)^n u_n$ où

$$u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 15
On pose $J_n = \int_0^{\pi/4}\tan(x)^n\,dx$. Calculer $J(n+2)+J(n)$. En déduire les sommes des séries de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 16*

1. Quelle est la nature de $\sum \frac{n^n}{n!}$?
2. Quelle est la nature selon p de $\sum \frac{n^{np}}{(np)!}$?

Exercice 17*
On considère la suite (u_n) telle que:

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

Etudier la série de terme général u_n et celle de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 18*
Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sin k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 19*
Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 20*
On se donne $p \in \mathbb{R}_+^*$. et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général $u_n = n^\alpha \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{\ln(k+p)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21*

1. Donner l'ensemble D des réels x tels que $\sum(1/n^x)$ converge.
2. Donner l'ensemble des complexes z tels que $\sum(1/n^z)$ converge absolument.
3. Sous réserve d'existence, on note
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
Donner un entier n tel que
$$0 \leq f(3) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 10^{-5}$$
et en déduire une valeur approchée de $f(3)$.
4. On pose $z_1 = 3 + 2i$. Donner un entier n tel que
$$\left| f(z_1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{z_1}} \right| \leq 10^{-5}$$
En déduire une valeur approchée de $f(z_1)$.

Exercice 22*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $u_n = \mathrm{Tr}(A^n)$.

1. Exprimer A^3 en fonction de A et I_3.
2. En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \in \mathbb{N}^*$.
4. Etudier $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 23**
Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2$.

1. Donner un équivalent de v_n.
2. Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{v_k}$.
3. En déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 24**
Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

1. Quelle est la nature de (S_n) ?
2. Trouver un équivalent de (S_n) quand $n \to +\infty$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, on pose $u_n = S_n - \frac{\ln(n)^2}{2}$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 25**
Soit $\sum\limits_{n \geq 2} a_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $b_n = -a_n \frac{\ln(a_n)}{\ln n}$.

1. Par une étude de $x \mapsto -x \ln x$, montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geq 2$, tel que :
$$\forall k \geq k_0 \qquad a_k \leq \frac{1}{k^3} \quad \Longrightarrow \quad b_k \leq \frac{3}{k^3}.$$
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 2} b_n$ converge.
3. Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ une suite de termes dans $]0, 1[$ telle que la série $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{u_n}{\ln(u_n)}$ converge. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{u_n}{\ln n}$ converge.