REVISIONS ANALYSE

CCINP 84-89-1-43-55-3-4.

Exercice 1

1. Trouver l'inverse de $2-3i$.
2. Trouver le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ et $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 2
Trouver la partie réelle du nombre complexe $A=\frac{(3-i)}{(1+i)(1+2i)}$.

Exercice 3
Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver les parties réelle et imaginaire de $\frac{1+ix}{1-ix}$.

Exercice 4
Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$: $\frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$.

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-3z+3-i=0$.

Exercice 6
Montrer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$: $|u|+|v| \leq |u+v|+|u-v|$.

Exercice 7
Montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{U}^3$: $a+b+c=0 \quad \Longleftrightarrow \quad ab+ac+bc=0$.

Exercice 8
Linéariser $\sin^4 x$ et $\cos^5 x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Exercice 9

1. Résoudre l'équation $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$.
2. Résoudre l'équation $\sin x=\cos^2 x$, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 10
Soient $a, x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, transformer en produits les sommes :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx), \qquad T_n=\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(a+kx), \qquad U_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \cos(a+kx).$$

Exercice 11
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$. $(n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 12
Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{19-x} + \sqrt{97+x} = 14.$$

Exercice 13

1. Pour $x > 1$, simplifier $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$.
2. Pour x réel, simplifier $\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Exercice 14
Résoudre les équations suivantes :
a. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$, b. $\log_a x = \log_x a$, c. $\log_3 x - \log_2 x = 1$.

Exercice 15

1. Résoudre l'équation shx = y d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre fixé $y \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation chx = y d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ et de paramètre fixé $y \in [1, +\infty[$.

Exercice 16
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon\frac{\pi}{2}$$

où $\varepsilon = -1$ si $x < 0$ et $\varepsilon = 1$ si $x > 0$.

Exercice 17

1. On pose $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sin(x))$.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) f est-elle périodique ?
   (c) f possède-t-elle une parité ?
   (d) Dessiner le graphe de f.
2. Que dire de $g : x \mapsto \sin(\mathrm{Arcsin}(x))$?

Exercice 18 Exprimer comme puissance de a chacune des expressions suivantes :

$$\left(a^{(n^2)}\right)^2 \qquad \frac{a^{(n^2)}}{a^n} \qquad a^{3n}(a^n)^3 \qquad (a^n)^n.$$

Exercice 19
Simplifier, pour n$\in \mathbb{N}$, les expressions suivantes :

1. $(n+1)! - n!$, 2. $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$.

Exercice 20

1. Démontrer que $(2 \leq a \leq 3 \quad \text{et} \quad 1 \leq b \leq 2) \implies 2 \leq a^2 - \frac{2}{b} \leq 8.$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{2n+2}{2n+3} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}.$$
3. Soit $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire l'inégalité pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}.$$
4. Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{1+x}{2\sqrt{x}} > 1$.
5. Pour x et a réels, quel est le signe de $x + \sqrt{x^2 + a^2}$?

Exercice 21
Donner les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n = 3$, 2. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $n = 3$.

Exercice 22
Déterminer les limites éventuelles des suites :

a. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$, b. $\left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/\ln n}$, c. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, d. $u_n = \left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$.

Exercice 23
Trouver des équivalents simples aux suites :

a. $u_n = \frac{4^n - 3^n}{2^n - 1}$, b. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, c. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, d. $u_n = n \sin \frac{1}{n^2}$,

e. $u_n = n^{1/n} - 1$, f. $u_n = \frac{\ln(2n)}{n}$.

Exercice 24
Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice 25
Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n^2+2}{3u_n}$.

Exercice 26

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{q=0}^{n} \sum\limits_{p=0}^{q} 2^p$.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

Exercice 27 Centrale 1
Soient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_0 = y_0 \in [0, 7]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n},\ y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n, y_n \in [0, 7]$.

b. On suppose que (x_n) et (y_n) convergent. Déterminer leurs limites.

c. Montrer que les suites ne sont pas strictement monotones. Convergent-elles ?

Exercice 28 Mines-Ponts
Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut résoudre $\tan(x) = x$ sur $I_n =]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution x_n sur I_n.
2. Trouver un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.
3. Déterminer le développement asymptotique de x_n avec une précision $o(1/n^2)$.

Exercice 29 Centrale 2

1. On étudie les suites réelles vérifiant la relation de récurrence
$$z_{n+2} = \frac{z_{n+1}}{n+1} + z_n \qquad (*)$$
On pose (α_n) la suite vérifiant $(*)$ et $(\alpha_0, \alpha_1) = (1, 1)$ et (β_n) celle vérifiant $(*)$ et $(\beta_0, \beta_1) = (0, 1)$.
   (a) Définir une fonction $Z(n, a, b)$ qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite (z_n) vérifiant $(*)$ et $(z_0, z_1) = (a, b)$.
   (b) Afficher les 20 premiers termes des suites (α_n) et (β_n). Que constate-t-on ?
   (c) Conjecturer la limite de la suite (α_n/β_n).
   (d) Calculer explicitement α_n et β_n.
   (e) Vérifier la conjecture sur α_n/β_n.
2. Pour tout $x > 0$, on définit la suite (u_n) par $u_0 = x$ et $\forall n,\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}}$ $(**)$.
   (a) Définir une fonction $U(x, n)$ qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite.
   (b) Définir une fonction *plotU*(x) qui affiche pour $k \in [0, 99]$ la ligne polygonale reliant les points (k, u_k). Tracer la courbe pour $x = 1$, $x = 7$ et $x = 15$.
   (c) Conjecturer le comportement de (u_n) et justifier mathématiquement.