REVISIONS ANALYSE

Exercice 1
Calculer les parties réelle et imaginaire de

a. $(3+2i)^2(2-i)$, b. $\frac{(3+2i)(1+i)}{1-i}$.

Exercice 2
Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$.

Exercice 3
A tout complexe z différent de 1, on associe le complexe $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$. Montrer :

$$|z'| = 1, \qquad \frac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}, \qquad \frac{z'+1}{z-1} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 4
Déterminer le module et un argument de :

a. $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}$, b. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, c. $e^{i\theta}-1$ où θ est un réel.

Exercice 5
Résoudre les équations suivantes :
a. $z^2 = -2i$, b. $(z-2i)^4 = -16$, c. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Exercice 6
Linéariser $\cos^4 x$, $\sin^5 x$, $\cos^2 x \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Exercice 7
Soient a, x des réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, transformer en produits les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kx), \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(a+kx), \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(a+kx).$$

Exercice 8
Trouver A réel positif et φ réel tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{3}\cos t + 3\sin t = A\cos(t-\varphi).$$

Exercice 9

1. Résoudre l'équation $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.
2. Résoudre l'équation $\sin x = \cos^2 x$, sur $]\,0, \frac{\pi}{2}\,[$.

Exercice 10
Soit $x \in \,]\,0, \frac{\pi}{2}\,[$ tel que $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{2}$. Calculer $\frac{\sin 3x}{\sin x}$.

Exercice 11

1. On suppose $2 \leq |a| \leq 4$ et $5 \leq |b| \leq 6$. Encadrer $|a+b|$, $|a+2b|$, $|a-2b|$, $\frac{a^2|b+1|}{|a-2b|}$ en utilisant les inégalités triangulaires.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n^n}{n!} \geq n$.
3. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $x + x^2 < 2\sqrt{x}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $x - \sqrt{x^2+a^2} \leq 0$.
5. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$.
6. Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \neq b \Longrightarrow \ln(a+b) > \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+e^x) \geq \frac{x}{2} + \ln 2$.
8. Montrer que si $2x + 4y = 1$, alors $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

Exercice 12

1. Résoudre l'équation $\mathrm{sh}x = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre fixé $y \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\mathrm{ch}x = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ et de paramètre fixé $y \in [1, +\infty[$.

Exercice 13
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations :

a. $\begin{cases} 8^x & = & 10y \\ 2^x & = & 5y \end{cases}$, b. $\begin{cases} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \end{cases}$.

Exercice 14
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

où $\varepsilon = -1$ si $x < 0$ et $\varepsilon = 1$ si $x > 0$.

Exercice 15
Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 16

1. On pose $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}(\cos(x))$.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) f est-elle périodique ?
   (c) f possède-t-elle une parité ?
   (d) Dessiner le graphe de f.
2. Que dire de $g : x \mapsto \cos(\mathrm{Arccos}(x))$?

Exercice 17
Donner les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \tan^2 x$, $n = 5$,
2. $f(x) = \ln(\frac{\arctan x}{x})$, $n = 3$,
3. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$,$n = 3$,
4. $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$, $n = 3$,
5. $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^x + 3)$, $n = 2$.

Exercice 18
Déterminer :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x)$, où
   (a) $f(x) = \frac{a^a - (a+x)^a}{(a+x)^{a+x} - a^a}$ ($a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$),
   (b) $f(x) = x^{(x^x)} - 1$, $f(x) = x^{x^x - 1}$, $f(x) = x^{(x^{x-1})}$,
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, où
   (a) $f(x) = x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$,
   (b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2}$,
   (c) $f(x) = \left(\mathrm{ch}(\frac{a}{x}) + b\,\mathrm{sh}(\frac{a}{x})\right)^x$, a et b étant deux réels fixés,
   (d) $f(x) = \mathrm{sh}\left(\sqrt{x^2+x}\right) - \mathrm{sh}\left(\sqrt{x^2-x}\right)$.

Exercice 19
Former le $DL_2(1)$ de $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

Exercice 20
Simplifier, pour n$\in \mathbb{N}$, a et b réels non nuls, les expressions suivantes :
a. $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$, b. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ où $u_n = \frac{a^n}{n! b^{2n}}$.

Exercice 21

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Simplifier le produit $P_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
2. Soit $(u_n) = ((-2)^n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.
   $\sum\limits_{k=0}^{2n} u_k$, $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} u_k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k+1}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k + n)$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right) + n$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{k+n}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{kn}$.

Exercice 22
Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n^2}{k^2+n^3}.$$

Exercice 23
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger (minorer $(u_{2n} - u_n)$). En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 24
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + 1}$$

diverge vers $+\infty$.

Exercice 25
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0, 2]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^n u_n}$$

diverge.

Exercice 26
On considère l'équation $(E_n)\ :\ x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution x_n réelle sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite qu'on notera ℓ.
3. Trouver un équivalent simple de $x_n - \ell$ en $+\infty$.

Exercice 27
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

où f est une fonction dérivable en 0.

Exercice 28
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'équation $(E_n) \qquad x - e^{-x} = n$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x_n.
2. Montrer que $x_n \in [n, n+1]$.
3. Trouver un équivalent de $x_n - n$ lorsque n tend vers $+\infty$.