

REVISIONS ANALYSE

CCINP 84-89-1-43-55-3-4.

Exercice 1

Calculer les parties réelle et imaginaire de

$$\text{a. } (3 + 2i)^2(2 - i), \quad \text{b. } \frac{(3+2i)(1+i)}{1-i}.$$

Exercice 2Calculer $(1 + i\sqrt{3})^9$.**Exercice 3**A tout complexe z différent de 1, on associe le complexe $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$. Montrer :

$$|z'| = 1, \quad \frac{z' - 1}{z - 1} \in \mathbb{R}, \quad \frac{z' + 1}{z - 1} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 4

Déterminer le module et un argument de :

$$\text{a. } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}, \quad \text{b. } \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3+i}}, \quad \text{c. } e^{i\theta} - 1 \text{ où } \theta \text{ est un réel.}$$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

$$\text{a. } z^2 = -2i, \quad \text{b. } (z - 2i)^4 = -16, \quad \text{c. } 27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0.$$

Exercice 6Linéariser $\cos^4 x$, $\sin^5 x$, $\cos^2 x \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$).**Exercice 7**Soient a, x des réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, transformer en produits les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin(a + kx), \quad T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{ch}(a + kx), \quad U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sin(a + kx).$$

Exercice 8Trouver A réel positif et φ réel tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{3} \cos t + 3 \sin t = A \cos(t - \varphi).$$

Exercice 9

1. Résoudre l'équation $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.
2. Résoudre l'équation $\sin x = \cos^2 x$, sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 10Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{2}$. Calculer $\frac{\sin 3x}{\sin x}$.

Exercice 11

1. On suppose $2 \leq |a| \leq 4$ et $5 \leq |b| \leq 6$. Encadrer $|a + b|$, $|a + 2b|$, $|a - 2b|$, $\frac{a^2|b+1|}{|a-2b|}$ en utilisant les inégalités triangulaires.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n^n}{n!} \geq n$.
3. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $x + x^2 < 2\sqrt{x}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, x - \sqrt{x^2 + a^2} \leq 0$.
5. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.
6. Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \neq b \implies \ln(a + b) > \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1 + e^x) \geq \frac{x}{2} + \ln 2$.
8. Montrer que si $2x + 4y = 1$, alors $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

Exercice 12

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh}x = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre fixé $y \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\operatorname{ch}x = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ et de paramètre fixé $y \in [1, +\infty[$.

Exercice 13

Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes d'équations :

$$\text{a. } \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}, \quad \text{b. } \begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases}.$$

Exercice 14

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

où $\varepsilon = -1$ si $x < 0$ et $\varepsilon = 1$ si $x > 0$.

Exercice 15

Résoudre dans \mathbb{R}

$$\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 16

1. On pose $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x))$.
 - (a) Quel est le domaine de définition de f ?
 - (b) f est-elle périodique ?
 - (c) f possède-t-elle une parité ?
 - (d) Dessiner le graphe de f .
2. Que dire de $g : x \mapsto \cos(\operatorname{Arccos}(x))$?

Exercice 17

Donner les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \tan^2 x$, $n = 5$,
2. $f(x) = \ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right)$, $n = 3$,
3. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n = 3$,
4. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $n = 3$,
5. $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^x + 3)$, $n = 2$.

Exercice 18

Déterminer :

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x)$, où
 - (a) $f(x) = \frac{a^x - (a+x)^a}{(a+x)^{a+x} - a^a}$ ($a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$),
 - (b) $f(x) = x^{(x^x)} - 1$, $f(x) = x^{x^{x-1}}$, $f(x) = x^{(x^{x-1})}$ ($x > 0$),
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, où
 - (a) $f(x) = x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$,
 - (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$,
 - (c) $f(x) = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{a}{x}\right) + b \operatorname{sh}\left(\frac{a}{x}\right)\right)^x$, a et b étant deux réels fixés,
 - (d) $f(x) = \operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2 + x}\right) - \operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2 - x}\right)$.

Exercice 19

Former le $DL_2(1)$ de $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

Exercice 20

Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$, a et b réels non nuls, les expressions suivantes :

- a. $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$, b. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ où $u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$.

Exercice 21

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Simplifier le produit $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
2. Soit $(u_n) = ((-2)^n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.
 $\sum_{k=0}^{2n} u_k$, $\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$, $\sum_{k=0}^n u_{2k}$, $\sum_{k=0}^n u_{2k+1}$, $\sum_{k=0}^n (u_k + n)$, $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right) + n$, $\sum_{k=0}^n u_{k+n}$, $\sum_{k=0}^n u_{kn}$.

Exercice 22

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k + n^2}{k^2 + n^3}.$$

Exercice 23

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger (minorer $(u_{2n} - u_n)$). En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 24

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + 1}$$

diverge vers $+\infty$.

Exercice 25

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0, 2]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^n u_n}$$

diverge.

Exercice 26

On considère l'équation $(E_n) : x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution x_n réelle sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite qu'on notera ℓ .
3. Trouver un équivalent simple de $x_n - \ell$ en $+\infty$.

Exercice 27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

où f est une fonction dérivable en 0.

Exercice 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'équation $(E_n) \quad x - e^{-x} = n$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution dans \mathbb{R} , que l'on notera x_n .
2. Montrer que $x_n \in [n, n+1]$.
3. Trouver un équivalent de $x_n - n$ lorsque n tend vers $+\infty$.