ESPACES PREHILBERTIENS REELS

Exercice 1
On munit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par :

$$\forall (A,B) \in E^2 \qquad (A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Trouver une base de $F^{\perp}$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur F.

Solution

1. Posons $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $F = \mathrm{Vect}(J,K)$ et (J,K) est clairement libre, donc c'est une base de F. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in F^{\perp} &\iff (J|M) = 0 \quad \text{et} \quad (K|M) = 0 \\ &\iff a - d = 0 \quad \text{et} \quad c + b = 0 \\ &\iff d = a \quad \text{et} \quad c = -b. \end{aligned}$$

Posons $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(I_2, L)$. (I_2, L) est clairement une famille libre, donc c'est une base de $F^{\perp}$.

2. **Première version** On remarque que

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$, la projection orthogonale de B sur F est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième version On orthonormalise la base (J,K) de F. Les deux éléments sont déjà orthogonaux, il reste à les normer : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}J, \frac{1}{\sqrt{2}}K\right)$ est une base orthonormée de F et donc le projeté orthogonal de B sur F est

$$\frac{1}{2}(J|B)J + \frac{1}{2}(K|B)K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
On pose $V = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}M = 0 \text{ et } {}^t\overline{M} = M\}$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Caractériser l'appartenance à V de M avec des conditions sur a, b, c et d.
2. Montrer que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et en donner une base.
3. Montrer que $(A, B) \in V^2 \mapsto \operatorname{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur V et donner une base de V orthonormée pour celui-ci.
4. Trouver une relation entre $\det A$ et $\|A\|$ pour $A \in V$.

Solution

1. $M \in V$ si et seulement si $a = \overline{a}$, $c = \overline{b}$ et $d = \overline{d}$.
2. Avec la question précédente, les matrices de V s'écrivent
$$\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix}$$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a donc, en posant $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$,
$$V = \operatorname{Vect}(J, K, L).$$
(J, K, L) est clairement libre. Ainsi c'est une base de V. V est donc de dimension 3.
3. Soit $(A, B) \in V^2$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b'+ic' \\ b'-ic' & -a' \end{pmatrix}$. Alors
$$(A|B) = 2(aa' + bb' + cc').$$
On vérifie aisément que $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
On orthonormalise la base (J, K, L). On trouve $\|J\| = \sqrt{2}$, $(J|K) = 0$, $\|K\| = \sqrt{2}$, $(J|L) = 0$, $(K|L) = 0$ et $\|L\| = \sqrt{2}$. Finalement, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}J, \frac{1}{\sqrt{2}}K, \frac{1}{\sqrt{2}}L\right)$ est une base orthonormée de V.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix} \in V$. Alors $\det(A) = -a^2 - b^2 - c^2 = \frac{-1}{2}\|A\|^2$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie de vecteurs unitaires de E tels que
$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2.$$
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Solution

On note $F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. F est donc de dimension finie. Il est donc supplémentaire dans E avec son orthogonal. Cherchons ce dernier.
Soit $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(e_i|x) = 0$ et donc $\|x\| = 0$. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$ et comme $E = F \oplus F^\perp$, $E = F$. La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$, avec les hypothèses de départ
$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_i|e_k)^2 = 1 + \sum_{k=1, k \neq i}^{n} (e_i|e_k)^2.$$

On a donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(e_i|e_k) = 0$. La famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale. Comme elle est composée de vecteurs unitaires, c'est une famille orthonormale. C'est donc une famille libre : c'est finalement une base de E, et donc une base orthonormale de E.

Exercice 4*

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1. A quelle condition définit-on ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
2. On suppose cette condition vérifiée. Donner une b.o.n. de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/\ P(a_n) = 0\}$. Déterminer l'orthogonal de F dans $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer la distance de X^n à F.

Solution

1. On montre aisément qu'on a bien affaire à une forme bilinéaire symétrique positive.
   Montrons qu'elle est bien définie positive si et seulement si les a_k sont deux à deux distincts.
   Supposons qu'il existe k et l distincts dans $[\![0, n]\!]$ tels que $a_k = a_l$. Posons $P = \prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (X - a_i)$.
   Par construction, $(P|P) = 0$ alors que $P \in E$ et $P \neq 0$. $(.|.)$ n'est donc pas un produit scalaire.
   Si les a_k sont deux à deux distincts. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $(P|P) = 0$, alors $P(a_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et P possède plus de racines que son degré : $P = 0$ et $(.|.)$ est bien un produit scalaire. Cette étude exhaustive permet de conclure.

2. Pour $i = 0, \dots n$, on pose $L_i = \dfrac{\prod\limits_{k=0, k\neq i}^{n} (X - a_k)}{\prod\limits_{k=0, k\neq i}^{n} (a_i - a_k)}$. On vérifie que $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. F est le noyau d'une forme linéaire non nulle, c'est donc un hyperplan. $L_n \notin F$, donc $\mathbb{R}_n[X] = F \oplus \mathrm{Vect}(L_n)$. Comme les autres L_i sont dans F, sont en bon nombre (n) et sont bien linéairement indépendants car ils forment une famille orthonormale, $F = \mathrm{Vect}(L_0, \dots, L_{n-1})$. Puisque les L_i sont deux à deux orthogonaux, $F^\perp = \mathrm{Vect}(L_n)$.
   Notons d la distance de X^n à F. Le cours nous dit que c'est aussi la norme du projeté orthogonal de X^n sur $F^\perp$ (Pythagore). On a donc
   $$d = \|(X^n|L_n)L_n\| = |(X^n|L_n)| = |a_n^n|.$$

Exercice 5*

On note $(e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de l'espace euclidien E et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$.

1. Montrer que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, $\| \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\|^2 \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2)$.
2. En déduire que $(e_i + u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E.

Solution

1. Par inégalité triangulaire
$$\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\|u_i\|.$$
On reconnaît alors le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ de $U = (|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ avec $V = (\|u_1\|, \dots, \|u_n\|)$. On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire :
$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\|u_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2}.$$
On conclut en élevant au carré et par transitivité.

2. Il suffit de montrer que c'est une famille libre, puisqu'elle contient n vecteurs et que E est de dimension n, la première base (orthonormée) comportant n vecteurs.
Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(e_i + u_i) = 0$. On a
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i.$$
On en prend la norme, on élève au carré, (e_i) étant une base orthnormée, il vient, avec la première question
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \leq (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2)(\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2).$$
Si les λ_i ne sont pas tous nuls, on peut simplifier par $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2 > 0$, il vient
$$1 \leq \sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2$$
ce qui contredit les hypothèses. Ainsi, tous les λ_i sont nuls et $(e_i + u_i)$ est libre dans E et donc c'est une base de E.

Exercice 6* Mines-Ponts
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on note
$$\phi(P,Q) = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Calculer $\phi(X^p, X^q)$.

3. Déterminer
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^{\infty}(t^2-(at+b))^2e^{-t}\,dt$$

Solution
ϕ est tout d'abord bien définie car pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto e^{-t}P(t)Q(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et c'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La symétrie et la linéarité par rapport à la seconde variable sont immédiates. On a
$$\phi(P,P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}\,dt$$

Comme on intégre une fonction positive continue, le résultat est positif et n'est nul que si la fonction est nulle, c'est à dire $P = 0$ (polynôme dont tous les éléments de $\mathbb{R}^+$ sont racines). On a donc aussi le caractère défini positif et ϕ est bien un produit scalaire.
Pour tout entier naturel n, je pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$. Une intégration par parties (en prenant garde à l'existence des quantités écrites) donne

$$\forall n \geq 1,\ I_n = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + nI_{n-1} = nI_{n-1}$$

Comme $I_0 = 1$, une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$$

En particulier,

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ \phi(X^p, X^q) = (p+q)!$$

Posons $F = \mathbb{R}_1[X]$. On nous demande de calculer (distance à sous-espace de dimension finie d'un préhilbertien réel, on note $\|.\|$ la norme associé au produit scalaire)

$$\inf_{P\in F} \|X^2 - P\|^2 = d(X^2, F)^2 = \|X^2 - p(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|p(X^2)\|^2$$

où p est la projection orthogonale sur F. En notant (P_0, P_1) une base orthogonale de F, on a donc

$$\inf_{P\in F} \|X^2 - P\|^2 = \phi(X^2, X^2) - \frac{\phi(X^2, P_0)^2}{\phi(P_0, P_0)} - \frac{\phi(X^2, P_1)^2}{\phi(P_1, P_1)}$$

D'après la méthode de Schmidt, on peut choisir

$$P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X - \frac{\varphi(X, 1)}{\varphi(1, 1)} = X - 1$$

Ainsi

$$\inf_{P\in F} \|X^2 - P\|^2 = 4! - 4 - 16 = 4$$