ESPACES PREHILBERTIENS REELS

CCINP 39 - 76 - 77 - 79 - 80 - 81 - 82 - 92

Exercice 1
On munit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par :

$$\forall (A,B) \in E^2 \qquad (A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Trouver une base de $F^\perp$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur F.

Exercice 2
On pose $V = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}M = 0 \text{ et } {}^t\overline{M} = M\}$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Caractériser l'appartenance à V de M avec des conditions sur a, b, c et d.
2. Montrer que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et en donner une base.
3. Montrer que $(A,B) \in V^2 \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur V et donner une base de V orthonormée pour celui-ci.
4. Trouver une relation entre $\det A$ et $\|A\|$ pour $A \in V$.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie de vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 4*
Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1. A quelle condition définit-on ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
2. On suppose cette condition vérifiée. Donner une b.o.n. de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] /\ P(a_n) = 0\}$. Déterminer l'orthogonal de F dans $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer la distance de X^n à F.

Exercice 5*
On note $(e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de l'espace euclidien E et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$.

1. Montrer que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, $\| \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\|^2 \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2)$.
2. En déduire que $(e_i + u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E.

Exercice 6* Mines-Ponts
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on note
$$\phi(P, Q) = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\phi(X^p, X^q)$.
3. Déterminer
$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{\infty} (t^2 - (at + b))^2 e^{-t}\, dt$$