REVISIONS PROBABILITES : corrigé

Exercice 1

Il faut ranger sur une étagère 6 livres de mathématiques distincts, 4 livres de physique distincts et 2 livres d'informatique distincts. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement dans les cas suivants.

1. Les livres doivent être groupés par matières.
2. Les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

Solution

1. On choisit l'ordre des matières : il y a 3 matières, on a donc $3! = 6$ choix. Par matière, le choix de l'ordre des livres donne $6! = 720$ choix pour organiser les livres de maths, $4! = 24$ choix pour organiser les livres de physique et $2! = 2$ choix pour organiser les livres d'informatique.
   On a donc finalement, $6 \times 720 \times 24 \times 2 = 207360$ façons d'effectuer ce rangement.
2. On considère le paquet des livres de maths comme un seul bloc. Avec les 6 autres livres, cela fait 7 blocs. On a donc $7! = 5040$ chois pour l'organisation de ces blocs. Pour chaque organisation, on peut placer les livres de maths à l'intérieur de leur bloc : cela fait $6! = 720$ choix.
   On a donc finalement $5040 \times 720 = 3628800$ façons d'effectuer ce nouveau rangement.

Exercice 2

On désire faire un bouquet de 5 fleurs différentes et de 3 feuillages différents. On peut choisir les fleurs parmi 10 espèces et les feuillages parmi 6. Combien de types différents de bouquets peut-on faire dans les cas suivants.

1. N'importe quel type de fleur et n'importe quel type de feuillage peuvent être choisis.
2. On veut absolument mettre une rose dans le bouquet.
3. On ne peut pas mélanger deux feuillages particuliers (chico et chamaérops), qui ne s'accordent pas esthétiquement.

Solution

Ici, dans un bouquet, les fleurs ne sont pas ordonnées.

1. On a $\binom{10}{5}$ choix pour les fleurs et $\binom{6}{3}$ choix pour les feuillages. On a donc $\binom{10}{5} \times \binom{6}{3} = 5040$ bouquets différents.
2. Une fleur est déjà choisie, on n'a donc plus que $\binom{9}{4}$ choix pour les fleurs.
   Finalement, on a $\binom{9}{4} \times \binom{6}{3} = 2520$ bouquets différents qui contiennent une rose.
3. Il faut compter les bouquets sans aucun des deux feuillages $\binom{10}{5} \times \binom{4}{3} = 1008$ choix, les bouquets avec le chamaérops mais sans le chico $\binom{10}{5} \times \binom{4}{2} = 1512$ choix et enfin les bouquets avec le chico, mais sans le chamaérops $\binom{10}{5} \times \binom{4}{2} = 1512$ choix.
   On a finalement $1008 + 1512 + 1512 = 4032$ choix de bouquets sans mélanger les deux feuillages.

Exercice 3

Les pièces fabriquées dans une usine proviennent de deux machines. La machine A produit 1% de pièces défectueuses et la machine B 5%. La production de l'usine provient à 70% de la machine A. On choisit au hasard une pièce produite par l'usine.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. On constate que la pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?

3. Même question dans le cas où l'on constate que la pièce n'est pas défectueuse.

Solution

1. On note D l'événement " La pièce est défectueuse" et A l'événement "La pièce provient de la machine A".
   Avec la formule des probabilités totales
   $$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A}).$$
   On obtient alors
   $$\mathbb{P}(D) = \frac{1}{100}\frac{70}{100} + \frac{5}{100}\frac{30}{100} = 0,022$$
   soit $2,2\%$ de chance que la pièce soit défectueuse.
2. On cherche donc $\mathbb{P}(A|D)$. On utilise la formule de Bayes :
   $$\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{1}{100}\frac{70}{100}}{\frac{22}{1000}} = \frac{7}{22}$$
   soit environ $31,8\%$.
3. On cherche cette fois-ci $\mathbb{P}(A|\overline{D})$. Comme précédemment, après inversion du conditionnement avec la formule de Bayes, on trouve $\frac{231}{326}$ soit $70,9\%$ environ.

Exercice 4

Une boîte contient 2 boules : une noire et une rouge. On tire n fois une boule dans cette boîte en la remettant après avoir noté sa couleur. On note A_n et B_n les événements :

A_n : "On obtient des boules des 2 couleurs au cours de n tirages".
B_n : "On obtient au plus une boule noire".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.
2. A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?
3. Même question si $n = 3$.

Solution

On note R_k l'événement "On tire une boule rouge au k-ième tirage".

1. $$\overline{A_n} = \left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) \bigcup \left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k}\right).$$
   Il s'agit d'une union d'événements incompatibles et d'intersections d'événements indépendants (tirage avec remise), donc
   $$\mathbb{P}(A_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\right) + \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2^n}.$$
   Finalement, $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.
   Pour B_n, on peut n'avoir que des boules rouges ou une boule noire, qui peut être tirée à n'importe quel rang. On a donc
   $$B_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} R_j\right) \bigcap \overline{R_k} \bigcap \left(\bigcap_{j=k+1}^{n} R_j\right)\right)\right).$$

Là encore, il s'agit d'union d'événements incompatibles puis d'intersection d'événements indépendants, donc

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}.$$

2. Pour $n = 2$, on trouve $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B_2) = \frac{3}{4}$. Par ailleurs, $A_2 \cap B_2 = A_2$, donc

$$\mathbb{P}(A_2 \cap B_2) \neq \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B_2)$$

les événements A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.

3. Pour $n = 3$, on trouve $\mathbb{P}(A_3) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, $A_3 \cap B_3$ correspond à l'événement "Obtenir exactement une boule noire", qui peut être tirée en premier, en deuxième ou en troisième position. On a ainsi

$$A_3 \cap B_3 = (R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) \cup (R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) \cup (\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3).$$

On trouve $\mathbb{P}(A_3 \cap B_3) = \frac{3}{8} = \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B_3)$: les événements A_3 et B_3 sont indépendants.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $Y = X^2$ et la loi de X est donnée par :

$$\mathbb{P}(X=-2) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{6}.$$

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Que peut-on en conclure ?

Solution

1. On a le tableau suivant

XY	0	1	4
-2	0	0	1/6
-1	0	1/4	0
0	1/6	0	0
1	0	1/4	0
2	0	0	1/6

2. Y peut prendre 3 valeurs : 0, 1 ou 4. En sommant par colonne, ce qui correspond à l'application de la formule des probabilités totales avec le système complet $((X=-2), (X=-1), (X=0), (X=0), (X=2))$, on obtient

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Y=4) = \frac{1}{3}.$$

3. On a $\mathbb{P}((X=-2) \cap (Y=0)) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X=-2) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{6}$, donc

$$\mathbb{P}((X=-2) \cap (Y=0)) \neq \mathbb{P}(X=-2)\mathbb{P}(Y=0).$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

4. $\mathbb{E}(XY) = (-8)\frac{1}{6} + (-1)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{6} + (1)\frac{1}{4} + (8)\frac{1}{6} = 0$. $\mathbb{E}(X) = 0$. Donc

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

pourtant les variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 6

Un dé A, parfaitement équilibré, porte les nombres 1 sur 4 faces et -2 sur les deux autres faces. Soit X la variable aléatoire réelle qui à un lancer du dé A, associe le nombre obtenu.

Un dé B porte les nombres -2, -1, 0, 1, 2, 3. Ce dé n'est pas équilibré. Les probabilités d'apparition de chaque face forment, dans l'ordre indiqué précédemment, une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

1. Quelles sont ces probabilités ?
2. On lance une fois simultanément les deux dés A et B et on désigne par S la variable aléatoire réelle qui, au lancer des deux dés, associe la valeur absolue de la somme des nombres obtenus.
   (a) Déterminer la loi du couple (X, S).
   (b) Quelle est la loi marginale de S ?
   (c) X et S sont-elles indépendantes ?

Solution

1. On pose $\mathbb{P}(-2) = d$, on a alors pour $k = 0 \ldots 5$, $\mathbb{P}(-2 + k) = \frac{d}{2^k}$.
   Or la somme de toutes ces probabilités vaut 1, on trouve alors

$$1 = d\frac{1 - \frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Finalement, $d = \frac{2^5}{2^6-1} = \frac{32}{63}$ et

$$\mathbb{P}(-2) = \frac{32}{63}, \quad \mathbb{P}(-1) = \frac{16}{63}, \quad \mathbb{P}(0) = \frac{8}{63}, \quad \mathbb{P}(1) = \frac{4}{63}, \quad \mathbb{P}(2) = \frac{2}{63}, \quad \mathbb{P}(3) = \frac{1}{63}.$$

2. (a) On obtient

XS	0	1	2	3	4
1	$\frac{32}{189}$	$\frac{80}{189}$	$\frac{8}{189}$	$\frac{4}{189}$	$\frac{2}{189}$
-2	$\frac{2}{189}$	$\frac{5}{189}$	$\frac{8}{189}$	$\frac{16}{189}$	$\frac{32}{189}$

   (b) On somme les colonnes pour obtenir la loi de S, ce qui correspond à l'application de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X = 1), (X = -2))$. On obtient

$$\mathbb{P}(S = 0) = \frac{34}{189}, \quad \mathbb{P}(S = 1) = \frac{85}{189}, \quad \mathbb{P}(S = 2) = \frac{16}{189}, \quad \mathbb{P}(S = 3) = \frac{20}{189}, \quad \mathbb{P}(S = 4) = \frac{34}{189}.$$

   (c) $\mathbb{P}(X = 1) \cap (S = 4)) = \frac{2}{189}$ alors que $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(S = 4) = \frac{34}{189}$:

$$\mathbb{P}(X = 1) \cap (S = 4)) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(S = 4).$$

Les variables X et S ne sont pas indépendantes.

Exercice 7* Formule d'inversion de Pascal
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} b_p$. Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} a_p.$$

Solution
On procède ou bien par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,
ou bien, on injecte l'expression des a_p dans la somme attendue.

On peut encore, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, poser $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

L'hypothèse se traduit par $A = MB$. Or M est inversible (triangulaire avec des éléments non nuls sur la diagonale). On a donc $B = M^{-1}A$. Il s'agit donc de trouver M^{-1}. Or, on remarque que M^T est la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de $P \mapsto P(X+1)$. Son inverse est clairement $P \mapsto P(X-1)$ et puisque $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$, on obtient

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{0-0}\binom{0}{0} & 0 & \cdots & & 0 \\ (-1)^{1-0}\binom{1}{0} & (-1)^{1-1}\binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^{n-0}\binom{n}{0} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & \cdots & (-1)^{n-n}\binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi l'expression de b_n voulue.

Exercice 8* Nombre de surjections

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
   (b) Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
   (c) Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+2]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
2. Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $a_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.
   (a) Montrer, pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
   $$p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} a_{n,k}.$$
   (b) En déduire, pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
   $$a_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n.$$

Solution

1. (a) Les surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ sont les bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On en a donc $n!$.

(b) Deux éléments de $[\![1, n]\!]$ doivent être envoyés sur la même image, ensuite, en considérant cette paire comme une seule entité, on compte le nombre de bijections d'un ensemble à n élements, sur $[\![1, n]\!]$. On a donc $\binom{n+1}{2}n!$ surjections, ou encore $\frac{n(n+1)!}{2}$.

(c) Ou bien trois éléments sont envoyés sur la même image, en procédant comme précédemment, on a alors $\binom{n+2}{3}n!$ possibilités.
Ou bien deux paires sont envoyées sur deux images distinctes : on choisit les 4 éléments concernés parmi $n+2$, puis on compte le nombre de façon de les regrouper par paires. On a donc $\binom{n+2}{4}\binom{4}{2}n! = \frac{n(n-1)(n+2)!}{8}$.

2. (a) p^n est le nombre d'applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$. On les dénombre en les regroupant par le cardinal de leur image. Si k est le cardinal de cette image, on choisit les éléments images : on a $\binom{p}{k}$ choix. On doit ensuite avoir une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans l'ensemble image de cardinal k, i.e. $a_{n,k}$ choix. D'où la formule.

(b) Il suffit d'appliquer la formule d'inversion de Pascal.

Exercice 9* Permutations et points fixes
On note d_n le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ne laissant aucun point fixe (on appelle de telles permutations, des dérangements).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
3. En déduire que le nombre de permutations de E, laissant exactement p points fixes $(0 \leq p \leq n)$ est :
$$\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Solution

1. $n!$ est le nombre de permutations de E. On les regroupe en fonction du nombre de points fixes. S'il y a l points fixes : on a $\binom{n}{l}$ façon de choisir ces points fixes. Les autre éléments sont alors permutés sans point fixe :
$$n! = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} d_{n-l}.$$
Il suffit alors d'effectuer le changement d'indice $k = n - l$ pour trouver la formule voulue.
2. On applique la formule d'inversion de Pascal.
3. On choisit ces p points fixes et on effectue un dérangement sur les autres éléments :
$$\binom{n}{p} d_{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}(n-p)! \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 10*
Soient X, Y deux variables aléatoire indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Solution

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ et on étudie la diagonalisabilité de A en fonction de x et y.
Clairement, si $x \neq y$, alors A possède deux valeurs propres distinctes et donc A est diagonalisable.
Si $x \neq y$, alors, si A était diagonalisable, elle serait semblable à xI_2 et donc $A = xI_2$, ce qui est faux.
Finalement, A est diagonalisable si et seulement si $x \neq y$.
On revient alors au problème de départ. Notons p la probabilité cherchée. Alors
$p = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y)$ et donc, par indépendance de X et Y,

$$1 - p = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{n-k}} \right)^2.$$

Il vient alors

$$1 - p = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

par la formule de Vandermonde, qui stipule que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

On la démontre en s'intéressant au coefficient de X^k du polynôme $(1 + X)^{m+n} = (1 + X)^m(1 + X)^n$.

Exercice 11* Tirage de deux boules : loi du plus petit et du plus grand numéros tirés.
Soit $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on tire deux boules sans remise. On note X (resp Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp au plus grand) des deux numéros obtenus.

1. Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, calculer $P(Y \leq k)$. En déduire la loi de Y.
2. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, calculer $P(X \geq k)$. En déduire la loi de X.
4. Montrer que les variables aléatoires Y et $n + 1 - X$ ont même loi. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Solution

1. Y est à valeurs dans $[\![2, n]\!]$. $P(Y \leq 1) = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, ($Y \leq k$ signifie que les deux numéros sont dans $[\![1, k]\!]$.
$$P(Y \leq k) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$
Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$.
2. On trouve $E(Y) = \frac{2}{3}(n + 1)$ et $V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$.
3. On procède de la même manière. On trouve, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X \geq k) = \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)}$.
Puis, pour $k \in [\![1, n - 1]\!]$, $P(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
4. Y et $n + 1 - X$ sont bien à valeurs dans $[\![2, n]\!]$. Pour $k \in [\![2, n]\!]$,
$P(n + 1 - x = k) = P(X = n + 1 - k) = P(Y = k)$. On a donc $E(Y) = n + 1 - E(X)$, d'où $E(X) = \frac{n+1}{3}$.
$V(Y) = (-1)^2 V(X)$, d'où $V(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$.

Exercice 12*

On fixe un entier naturel non nul n.

Une urne contient une unique boule, qui est blanche. On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0,1[$. Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1-p$. On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux pour le premier pile, trois pour le deuxième pile, etc. On ajoute $k+1$ boules noires lors de la k-ème obtention de pile.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

1. Exprimer N en fonction de X.
2. Quelle est la loi de X ?
3. En déduire, presque sans calcul, l'espérance de N.
   On tire une boule de l'urne et on pose B : "la boule tirée est blanche".
4. Démontrer rigoureusement que $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.
5. Calculer cette somme.

On change les règles : cette fois on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du k-ème pile, c'est à dire une boule au premier pile, deux au deuxième, quatre au troisième, etc. en doublant à chaque fois le nombre de boules noires ajoutées.

On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne.

6. Exprimer N' en fonction de X.
7. Calculer $E(N')$.
8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : "la boule tirée est blanche".

Solution

1. $$N = 1 + \sum_{k=1}^{X}(k+1) = \frac{(X+1)(X+2)}{2}.$$
2. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ (succession de n épreuves indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p).
3. $N = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$, par linéarité de l'espérance
$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2) + \frac{3}{2}\mathbb{E}(X) + 1 = \frac{1}{2}\mathbb{V}(X) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X)^2 + \frac{3}{2}\mathbb{E}(X) + 1$$
$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{2}npq + \frac{1}{2}n^2p^2 + \frac{3}{2}np + 1.$$
4. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=k)_{0\leq k\leq n}$.
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(B|X=k)\mathbb{P}(X=k).$$
   Pour $k \in [\![0,n]\!]$, il y a $N = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ boules dans l'urne, donc $\mathbb{P}(B|X=k) = \frac{1}{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$ (il y a une seule boule blanche). On obtient bien alors
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}.$$

5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= 2\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+2)!(n-k)!}p^k q^{n-k}\\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)p^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+2)!}{(k+2)!(n+2-(k+2))!}p^{k+2}q^{n+2-(k+2)}\\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)p^2}\sum_{l=2}^{n+2}\binom{n+2}{l}p^l q^{n+2-l}\\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)p^2}\left((p+q)^{n+2}-(n+2)pq^{n+1}-q^{n+2}\right)\\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)p^2}\left(1-(n+2)pq^{n+1}-q^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

6.

$$N' = 1+\sum_{k=1}^{X}2^{k-1} = 1+\frac{1-2^X}{1-2} = 2^X.$$

7. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(N') = \sum_{k=0}^{n}2^k\mathbb{P}(X=k).$$

$$\mathbb{E}(N') = \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2p)^kq^{n-k} = (2p+q)^n = (1+p)^n.$$

8. Comme pour la question 4, avec la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $(X=k)_{0\le k\le n}$.

$$\mathbb{P}(B') = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(B'|X=k)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^k q^{n-k} = \left(\frac{p}{2}+q\right)^n$$

$$\mathbb{P}(B') = \left(1-\frac{p}{2}\right)^n.$$