REVISIONS PROBABILITES

CCINP 95-98-99-101-104-105-107-109-112.

Exercice 1
Il faut ranger sur une étagère 6 livres de mathématiques distincts, 4 livres de physique distincts et 2 livres d'informatique distincts. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement dans les cas suivants.

1. Les livres doivent être groupés par matières.
2. Les livres de mathématiques seulement doivent être groupés.

Exercice 2
On désire faire un bouquet de 5 fleurs différentes et de 3 feuillages différents. On peut choisir les fleurs parmi 10 espèces et les feuillages parmi 6. Combien de types différents de bouquets peut-on faire dans les cas suivants.

1. N'importe quel type de fleur et n'importe quel type de feuillage peuvent être choisis.
2. On veut absolument mettre une rose dans le bouquet.
3. On ne peut pas mélanger deux feuillages particuliers (chico et chamaérops), qui ne s'accordent pas esthétiquement.

Exercice 3
Les pièces fabriquées dans une usine proviennent de deux machines. La machine A produit 1% de pièces défectueuses et la machine B 5%. La production de l'usine provient à 70% de la machine A. On choisit au hasard une pièce produite par l'usine.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. On constate que la pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?
3. Même question dans le cas où l'on constate que la pièce n'est pas défectueuse.

Exercice 4
Une boîte contient 2 boules : une noire et une rouge. On tire n fois une boule dans cette boîte en la remettant après avoir noté sa couleur. On note A_n et B_n les événements :
A_n : "On obtient des boules des 2 couleurs au cours de n tirages".
B_n : "On obtient au plus une boule noire".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.
2. A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?
3. Même question si $n = 3$.

Exercice 5
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $Y = X^2$ et la loi de X est donnée par :

$$\mathbb{P}(X=-2)=\frac{1}{6},\quad \mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{4},\quad \mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{6},\quad \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{4},\quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{6}.$$

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6
Un dé A, parfaitement équilibré, porte les nombres 1 sur 4 faces et -2 sur les deux autres faces. Soit X la variable aléatoire réelle qui à un lancer du dé A, associe le nombre obtenu.
Un dé B porte les nombres -2, -1, 0, 1, 2, 3. Ce dé n'est pas équilibré. Les probabilités d'apparition de chaque face forment, dans l'ordre indiqué précédemment, une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

1. Quelles sont ces probabilités ?
2. On lance une fois simultanément les deux dés A et B et on désigne par S la variable aléatoire réelle qui, au lancer des deux dés, associe la valeur absolue de la somme des nombres obtenus.
   (a) Déterminer la loi du couple (X, S).
   (b) Quelle est la loi marginale de S ?
   (c) X et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 7* Formule d'inversion de Pascal

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} b_p$. Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} a_p.$$

Exercice 8* Nombre de surjections

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
   (b) Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
   (c) Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+2]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
2. Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $a_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.
   (a) Montrer, pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

   $$p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} a_{n,k}.$$

   (b) En déduire, pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

   $$a_{n,p} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n.$$

Exercice 9* Permutations et points fixes

On note d_n le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ne laissant aucun point fixe (on appelle de telles permutations, des dérangements).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3. En déduire que le nombre de permutations de E, laissant exactement p points fixes $(0 \leq p \leq n)$ est :

   $$\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 10*
Soient X, Y deux variables aléatoire indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 11* Tirage de deux boules : loi du plus petit et du plus grand numéros tirés.
Soit $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on tire deux boules sans remise. On note X (resp Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp au plus grand) des deux numéros obtenus.

1. Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, calculer $P(Y \leq k)$. En déduire la loi de Y.
2. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, calculer $P(X \geq k)$. En déduire la loi de X.
4. Montrer que les variables aléatoires Y et $n+1-X$ ont même loi. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 12*
On fixe un entier naturel non nul n.
Une urne contient une unique boule, qui est blanche. On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$. Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$. On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux pour le premier pile, trois pour le deuxième pile, etc. On ajoute $k+1$ boules noires lors de la k-ème obtention de pile.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

1. Exprimer N en fonction de X.
2. Quelle est la loi de X ?
3. En déduire, presque sans calcul, l'espérance de N.
   On tire une boule de l'urne et on pose B : "la boule tirée est blanche".
4. Démontrer rigoureusement que $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
5. Calculer cette somme.

On change les règles : cette fois on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du k-ème pile, c'est à dire une boule au premier pile, deux au deuxième, quatre au troisième, etc. en doublant à chaque fois le nombre de boules noires ajoutées.
On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne.

6. Exprimer N' en fonction de X.
7. Calculer $E(N')$.
8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : "la boule tirée est blanche".