MINES-PONTS

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
On note S l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathcal{C}^m(\mathbb{R}))^n$ vérifiant :

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad x_p^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{p,i} x_i(t).$$

Montrer que A est nilpotente si et seulement si tous les éléments de S sont des fonctions polynomiales.
On pourra regarder ce qui se passe pour $m = 1$.

Exercice 2
Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, peut s'écrire $g - h$ avec g et h convexes sur $\mathbb{R}$.
On pourra penser aux parties positive et négative de f''.

Exercice 3
Soit $a > -1$.

1. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\sin^2(t)} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$. *On pourra faire le changement de variable $x = \tan(t)$.*

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n \geq 1} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} dt$?

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $\sum \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt$?

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt$?

Exercice 4
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien. Soit $a \in E$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_\alpha \ : \ x \mapsto x + \alpha (a|x) a.$$

1. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f_\alpha \circ f_\beta$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. f_α est-elle inversible et si oui calculer son inverse.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f_α.

Exercice 5
On s'intéresse à la série entière $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{n} x^n$.
Donner son rayon de convergence. On note f sa somme. Quel est le domaine de définition D de f ? Que vaut $f(x)$ pour tout $x \in D$?

Exercice 6
Soit $(X_1, \dots, X_N)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que chaque X_i suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$.
2. Soit $Y = \max\limits_{i \in [\![1,N]\!]} (X_i)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq n)$ et en déduire $\mathbb{P}(Y = n)$.
3. Y possède-t-elle une espérance finie ?

Exercice 7
On pose, pour $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{(1+x^2)(x^2+a^2)} dx.$$

Ecrire $J(a)$ en fonction de a, I et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2} dx$ et calculer cette dernière intégrale.

Exercice 8
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, telles que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad |f(a) - f(b)| = |a - b|$$

et $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Exercice 9
Montrer que l'intégrale suivante converge et donner sa valeur :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}} dx.$$

Pour le calcul, on pourra factoriser par x^2 puis faire le changement de variable $u = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1}}$.

Exercice 10
Montrer que la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$, est une matrice symétrique définie positive.
On pourra voir $\frac{1}{i+j}$ comme une intégrale.

Exercice 11
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n à coefficients réels, de degré n, tel que

$$T_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable et minorée. On note $m = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

1. On suppose que m n'est pas atteinte. Montrer qu'il existe $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(x_n) \leq m + \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad x_{n+1} \notin [x_n - 1, x_n + 1].$$
2. En déduire, dans tous les cas, l'existence de $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que
$$f'(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On suppose maintenant que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ et qu'elle est minorée. On note $m = \inf_{x\in\mathbb{R}^p} f(x)$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

3. On pose $g : x \mapsto f(x) + \varepsilon\|x\|_2$. Montrer que g est minorée et que sa borne inférieure est atteinte.
4. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|\nabla f(x)\| \leq \varepsilon$.
5. En déduire un résultat analogue à 2.

Exercice 13
Soit m un message aléatoire constitué de 0 et de 1, les deux lettres étant équiprobables. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de séries de 1 dans m. Par exemple si $m = 011010$, $X = 2$.

1. Donner la loi de X.
2. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$, continue telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ pour lequel : $\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} k$.

1. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Peut-on généraliser ?

Exercice 15
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. Montrer que l'on a bien affaire à une distribution de probabilités discrète.
2. Donner la fonction génératrice de X. Quel est son rayon de convergence ?
3. X admet-elle une espérance. Si oui, la calculer.

Exercice 16

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Soit a un complexe non nul. On suppose :

$$f \circ g - g \circ f = af.$$

f est-il inversible ?

Indication : on pourra montrer que pour $k \in \mathbb{N}, f^k \circ g - g \circ f^k = akf^k$.

Exercice 17

Soit $(A_1, \ldots, A_p) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^p$. On note $A = A_1 + \cdots + A_p$ et on suppose que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, si $i \neq j$ alors $A_i^T A_j = 0$.

1. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(A_i) = n$.

2. On suppose que $\sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(A_i) = n$ et que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Im}(A_j)$ est stable par A_j^T. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18

Soit (a_n) la suite réelle telle que $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2\frac{a_n}{n+2}$.

1. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

2. Calculer la somme f de cette série entière.

3. Expliciter les a_n.

MINES-TELECOM

Exercice 19
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$. Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 20
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. Calculer $\det(J - I_{2n})$.
2. Soit A une matrice carrée de taille $2n$, dont tous les éléments de la diagonale sont nuls et dont les autres éléments valent 1 ou -1. Montrer que $\det(A)$ est un entier impair. Qu'en déduire pour A ?

Exercice 21
On s'intéresse à la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ avec (a_n) une suite de réels convergente, de limite ℓ.

1. Donner le rayon de convergence de cette série entière. On note dorénavant f sa somme.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} f(x)$.

Exercice 22
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n pair. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, M n'ayant que des 0 sur sa diagonale et des 1 ou des -1 ailleurs. Montrer que M est inversible.

Exercice 23
On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres.
2. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.
3. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que R est diagonalisable.

Exercice 24
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Est-ce le cas si on ne suppose pas M inversible ?

Exercice 25
Un urne contient une boule rouge et une boule blanche. Lorsque l'on pioche une boule, on note sa couleur et on rajoute deux autres boules de la même couleur (en plus de celle piochée que l'on remet). Quelle est la probabilité de piocher indéfiniment une boule rouge ?

Exercice 26
On pose $f(x,t) = \dfrac{\ln(t)}{t^x}$ et $K(x) = \int\limits_1^{+\infty} f(x,t)dt$.

1. Montrer que $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(t)}{t}dt$ diverge.
2. Montrer que $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t}dt$ diverge.
3. Étudier la convergence de $K(x)$ pour $x \leq 1$, puis $x > 1$.
4. Donner l'ensemble de définition de K, noté D_K.
5. Montrer que K est de classe C^1 sur D_K.
6. Calculer $K(x)$ pour tout $x \in D_K$.

Exercice 27
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\det(M) \neq 0$ et $M^2 = M^T$. f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que $M^4 = M$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Calculer $\det(M)$.
4. Montrer que $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
5. Oubliée.

Exercice 28
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}dx$ et $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

1. Montrer que J_n est bien définie, que (J_n) converge et déterminer sa limite.
2. Calculer f_n' et trouver une relation de récurrence pour (J_n).
3. En déduire un équivalent de (J_n).

Exercice 29
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$$

où $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$, avec les a_i non tous nuls.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A.
3. Calculer A^2.
4. En déduire le spectre de A et son polynôme caractéristique.

Exercice 30
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit p un projecteur de E. On note

$$H = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ p = -p \circ f\}.$$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Donner, sans justification, les valeurs propres de p et les sous-espaces propres associés.
3. Soit $f \in H$.
   (a) Montrer que $\ker(p)$ est stable par f.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f et que $f_{|_{\mathrm{Im}(p)}} = 0$.
   (c) En déduire H.
4. On suppose E de dimension finie. Quelle est la dimension de H ?

Exercice 31
On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t} dt$. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Quel est le sens de variation de F ?
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Quelle est la limite de F en $+\infty$?
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $F(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t} dt$. En déduire le comportement de F en 0^+.

Exercice 32
Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\frac{1+x}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}} dx.$$

Exercice 33
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres deux à deux distinctes. On pose

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de B ?
2. A quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 34
Soit $q \in]-1, 1[$. On pose f continue en 0 telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx)$.

1. Montrer qu'une telle fonction existe et est unique.
2. Montrer que f est développable en série entière et donner son développement en série entière.

Exercice 35
Soit $a > 1$. On note $\zeta(a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(a)n^a}.$$

1. Vérifier que la loi de X est bien définie.
2. A quelle(s) condition(s) X possède-t-elle une espérance finie ? Dans ce cas, la calculer.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k = k\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X \in A_k)$.
   Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $i \neq j$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(X \in A_i)$ et $(X \in A_j)$ soient indépendants.

Exercice 36
Soit f l'unique solution sur $[0, 1[$, de

$$\begin{cases} (1-x)y'' &= y \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

Montrer que f est positive sur $]0, 1[$. On pourra utiliser $g = ff'$.

Exercice 37
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$ telles que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad (x_i|x_j) = (y_i|y_j).$$

Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est libre.

Exercice 38
Trouver les solutions de

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

sur $\mathbb{R}_+^*$, ayant une limite en 0^+.

Exercice 39
Soit $M \in O_p(\mathbb{R})$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M^k.$$

1. Trouver la limite de la suite $(A_n X)$ si X est un point fixe de M.
2. Montrer que $\mathbb{R}^p = \ker(M - I_p) \oplus^\perp \mathrm{Im}(M - I_p)$.
3. Trouver la limite de la suite $(A_n X)$ si $X \in \mathrm{Im}(M - I_p)$.
4. Etudier la suite (A_n).

Exercice 40

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
2. On note f sa somme, justifier que f est définie et continue sur $[-1, 1[$.
3. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer f.

CENTRALE

Exercice 41

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}dt \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}dt.$$

1. (a) Enoncer les théorèmes de régularité d'une intégrale à paramètre.
   (b) Justifier que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour $x > 0$, justifier que $g(x) = xg(1)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer pour $x > 0$, $f''(x) - 4f(x)$ en fonction de $g(1)$. En déduire f.
3. En déduire la valeur de $g(1)$.

Exercice 42
Soit f convexe sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler et prouver l'inégalité des pentes.
2. Soit $x \in I$. On pose $\Delta_x : y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
   (a) Montrer que Δ_x possède une limite à droite et à gauche en x.
   (b) Montrer qu'il existe $(a_i)_{i\in J}$ une famille de fonctions affines telles que $f = \sup\limits_{i\in J} a_i$.
3. Oubliée... Soit φ une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans I. Montrer que

$$f\left(\int_0^1 \varphi(x)dx\right) \leq \int_0^1 f\circ\varphi(x)dx.$$

Exercice 43

1. (a) Rappeler la définition de l'intégrabilité d'une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   (b) Donner Δ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $u_z : t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose $G : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.

2. Soit $z \in \Delta$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de $I_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$.
   (b) Montrer que $I_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G(z)$.
3. Oubliée...Montrer que pour tout $z \in \Delta$

$$\frac{1}{G(z)} = ze^{\gamma z} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right).$$

Exercice 44
Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit a un vecteur unitaire. Notons $H = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.
Posons s la symétrie orthogonale par rapport à H et p_H la projection orthogonale sur H.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F et $F^{\perp}$ sont en somme directe puis montrer que
$$\forall x \in E,\ p_H(x) = \ x \ - \langle x|a\rangle \ a.$$

Posons
$$\Omega = \{x \in E \mid \langle x|a\rangle \geq \ 0 \text{ et } \langle x|s(x)\rangle \leq 0\}.$$

2. Soit $x \in E$. Montrer les équivalences suivantes :
$$x \in \Omega \iff \langle x|a\rangle \ \geq \ ||p_H(x)||$$
$$x \in \Omega \iff \forall y \in \Omega,\ \langle x|y\rangle \ \geq 0$$

3. Oubliée...

Exercice 45
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue. On pose
$$\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iky}dy$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x).$$
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$
$$K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{ilx}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$
$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{ikx} = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$
puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x-y)f(y)dy.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(y)dy = 1.$$

3. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.

Exercice 46
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{a}{x}$.

1. (a) Rappeler les théorèmes d'intégration des relations de comparaison.
   (b) Donner un équivalent de $\ln \circ f$ en $+\infty$.
2. (a) On pose $u : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n) e^{-nx}$. Quel est le domaine de définition de u ?
   (b) Etudier les limites au bord du domaine.
3. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$u(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{c}{x} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 47

1. (a) Enoncer le théorème de Rolle.
   (b) Soit f vérifiant les hypothèses du théorème de Rolle, avec $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $a < b$ et f définie sur $]a, b[$. Montrer que la conclusion du théorème de Rolle reste vraie si f admet des limites (finies ou infinies) identiques en a et b.
2. On pose $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x^2-1}}$.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 - x^2)^{2n}} f(x).$$

   Quel est le degré de P_n ?
3. Etudier les zéros de $f^{(n)}$.

CCINP

Exercice 48
L'exercice a pour but de déterminer la nature de $\sum a_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$. Déterminer la nature de $\sum b_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{N}$.
3. Conclure.

Exercice 49
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A inversible. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = P^{-1}(BA)P$. En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
2. Soit $t \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $(A - tI_n)B$ et $B(A - tI_n)$ ont le même polynôme caractéristique.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \det((A - tI_n)B - xI_n)$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \det(B(A - tI_n) - xI_n)$. Montrer que f et g sont continues. En déduire que $g(0) = f(0)$.
4. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 50
$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. (a) Montre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *On pourra commencer par* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
   (c) En déduire l'expression de F.
2. Donner le domaine de définition de $G : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)} d\theta$.
3. Trouver un lien entre F et G.
4. Oubliée.

Exercice 51
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

1. Montrer que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres possibles.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ces valeurs propres possibles, deux à deux distinctes et E_{λ_i} les sous-espaces propres associés (éventuellement réduits à $\{0\}$ si λ_i n'est pas valeur propre de u.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
   (i) F est stable par u,
   (ii) $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel de E_{λ_i}.

Exercice 52
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_n$, $A \neq -I_n$ et $A^2 = I_n$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \equiv n\ [2]$.
2. Montrer que $|\mathrm{tr}(A)| \leq n - 2$.

Exercice 53
Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt) - \mathrm{Arctant}(t)}{t} dt$.

1. Donner le domaine D de définition de F.
2. Etudier la continuité puis la dérivabilité de F sur D.
3. Donner une forme explicite pour F.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Que vaut $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(at) - \mathrm{Arctant}(bt)}{t} dt$?

Exercice 54

$$g \ : \ x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\mathrm{sh}(t)}{t} dt.$$

1. Quel est le domaine de définition de g ? On le note D.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer g'.
3. Montrer que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Calculer $g(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice 55
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec n valeurs propres deux à deux distinctes.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base constituée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v.
2. Soit $\mathcal{E}$ une base de E. On note A la matrice représentative de u dans cette base. Discuter du nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 56
Pour $x > 0$, posons

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t + x} dt$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner son sens de variation.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Sachant que $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$ pour $t \in \left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right]$, montrer que

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

4. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 57
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = f.$$

1. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.
   (b) En déduire que f est nilpotente.

On suppose de plus que $f^{n-1} \neq 0$.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que le noyau de f est stable par g.
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de g est

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda + n - 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 58
Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes identiquement distribuées, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = q = 1 - p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une nouvelle variable aléatoire : $T_n = \prod_{k=0}^{n} X_k$.

1. Donner la loi de T_n et son espérance éventuelle.
2. Soit V une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner la loi de $\prod_{k=0}^{V} X_k$.

X-ENS

Exercice 59 X
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, continues et croissantes sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda u + f(u - v) = \lambda v + g(v - u)$.
2. Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda u + f(u - v) = \lambda v + g(v - u) = 0$.
3. Combien y a-t-il de solutions à la question 2. ?
4. On suppose que $\lambda = 0$. Refaire la question 3., en discutant suivant f et g.

Indication 1

Exercice 60 X
On s'intéresse à la série entière $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^{(3^n)}$.

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Montrer qu'il existe une infinité de points $x \in S(0, R)$ tels que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^{(3^n)}$ diverge.
3. Montrer qu'il existe une infinité de points $x \in S(0, R)$ tels que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^{(3^n)}$ converge.
4. Montrer que pour tout $x \in S(0, R)$, il existe $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S(0, R)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n} x_k^{(3^n)}$ diverge et (x_k) converge vers x ; et qu'il existe $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S(0, R)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n} y_k^{(3^n)}$ converge et (y_k) converge vers x.

Indication 2

Exercice 61 X
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Indication 3
On pourra s'intéresser au nombre de façons de descendre un escalier en sautant 1 ou 2 marches.

Exercice 62 X
Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On définit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A^i.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.

Indication 4 A est-elle diagonalisable ?

Exercice 63 X
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit symétrique. Donner une condition suffisante pour que A soit symétrique.

Indication 5

Exercice 64 ENS
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_i| \geq 2$. On pose

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $d_n = \det(A_n)$ est non nul, du signe du produit des a_i.
2. Montrer que A_n possède autant de valeurs propres (comptées avec ordre de multiplicité) strictement positives que de a_i strictement positifs.

Indication 6
On pourra considérer $B_n(t)$ la même matrice que A_n, mais où les 1 sont remplacés par t.

Exercice 65 ENS
On dit que $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est équidistribuée si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2k\pi x_n} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Soit α un irrationnel. Montrer que $(x_n) = (\alpha n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équidistribuée.
2. Soit (x_n) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(x_{n+k} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équidistribuée. On veut montrer que (x_n) est équidistribuée.
   Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 1$.
   (a) Soit $(H, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 \leq H \leq N$. Montrer que
   $$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \right| \leq \frac{2H}{N} + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{H} \sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k} \right|.$$
   (b) Montrer que
   $$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{H} \sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k} \right| \leq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{1}{H} \sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k} \right|^2}.$$
   (c) Conclure en posant, pour $\ell \in \mathbb{Z}^*$, $(a_n) = (e^{i2\ell\pi x_n})$.