MINES-TELECOM

Exercice 1
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$. Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ converge et calculer sa somme.

Solution 1
Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sin^n(x)$ est continue, donc u_n est bien définie. Comme elle est à valeurs dans $[0,1]$, par positivité de l'intégrale, $u_n \geq 0$ et par croissance de l'intégrale, (u_n) est décroissante.
On applique le théorème de convergence dominée pour montrer que (u_n) converge vers 0 : la suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ si $x \in [0, \pi/2[$ et 1 si $x = \pi/2$, fonction continue par morceaux. On utilise comme fonction de domination la fonction constante en 1.
On peut ensuite appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées pour conclure que $\sum(-1)^n u_n$ converge. On note (I_n) la suite de ses sommes partielles.
On note (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum(-1)^n f_n$. Soit $x \in [0, \pi/2[$. Comme $0 \leq \sin(x) < 1$, $\sum(-1)^n f_n(x)$ converge absolument (série géométrique). Donc (S_n) converge simplement sur $[0, \pi/2[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} S_n(x)dx.$$

On va donc appliquer le théorème de converge dominée à (S_n).
Chaque S_n est continue sur $[0, \pi/2[$.
On a déjà prouvé la convergence simple de (S_n) sur $[0, \pi/2[$. Sa limite simple est $x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)}$, qui est bien continue sur $[0, \pi/2[$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$|S_n(x)| = \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} \sin^{n+1}(x)}{1 + \sin(x)} \right| \leq \frac{2}{1 + \sin(x)}.$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)}$ est continue sur $[0, \pi/2]$, elle est bien intégrable (et positive) sur $[0, \pi/2[$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que (S_n) converge vers $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)}dx$, i.e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \sin^n(x)dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin(x)}dx.$$

On calcule cette dernière intégrale en faisant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On trouve

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1 + t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{1}{(1 + t)^2}dt = 2\left[-\frac{1}{1 + t}\right]_0^1 = 1.$$

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. Calculer $\det(J - I_{2n})$.
2. Soit A une matrice carrée de taille $2n$, dont tous les éléments de la diagonale sont nuls et dont les autres éléments valent 1 ou -1. Montrer que $\det(A)$ est un entier impair. Qu'en déduire pour A ?

Solution 2

1. On note D le déterminant cherché. On peut sommer toutes les colonnes dans la première : celle-ci est alors remplie de $2n-1$, qu'on peut mettre en facteur par multilinéarité du déterminant. On a donc
$$D = (2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & & 0 \end{vmatrix}.$$
On retire ensuite la première ligne à toutes les autres lignes :
$$D = (2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & -1 \end{vmatrix} = 1-2n.$$

2. On note $(\alpha_{i,j})$ les éléments de $J - I_{2n}$ et $(a_{i,j})$ ceux de A. Leurs classes dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont égales. Or
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{2n} a_{\sigma(j),j}.$$
On en déduit que $\det(A) \in \mathbb{Z}$. On regarde sa classe dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:
$$\overline{\det(A)} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{2n} \overline{a_{\sigma(j),j}} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{2n} \overline{\alpha_{\sigma(j),j}} = \overline{\det(J - I_{2n})}.$$
Ainsi $\det(A)$ et $\det(J - I_{2n})$ ont la même parité et donc $\det(A)$ est impair.
On en déduit alors que $\det(A)$ n'est pas nul et donc que A est inversible.

Exercice 3
On s'intéresse à la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ avec (a_n) une suite de réels convergente, de limite ℓ.

1. Donner le rayon de convergence de cette série entière. On note dorénavant f sa somme.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} f(x)$.

Solution 3

1. Comme (a_n) converge, elle est bornée. $\left(\frac{a_n}{n!}\right)$ est donc dominée par $\left(\frac{1}{n!}\right)$. Or le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n!} x^n$ est $+\infty$: par comparaison, celui de $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est plus grand, donc vaut aussi $+\infty$.

2. Si (a_n) était constante en ℓ, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} f(x) = \ell$ et donc la limite cherchée serait ℓ. On va donc montrer que, dans le cas général, cette limite est encore ℓ.
On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\Delta(x) = e^{-x} f(x) - \ell = e^{-x}\left(f(x) - \ell e^x\right) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n - \ell}{n!} x^n.$$
On fait ensuite un raisonnement "à la Césàro".
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies |a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$|\Delta(x)| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n - \ell|}{n!} x^n + e^{-x} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2n!} x^n.$$

La dernière somme étant à termes positifs est inférieure à la somme où l'indice commencerait à 0, i.e. $\frac{\varepsilon}{2} e^x$, d'où :

$$|\Delta(x)| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n - \ell|}{n!} x^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La première somme est un fonction polynomiale, donc négligeable devant e^{-x} en $+\infty$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, avec $x \geq A$,

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n - \ell|}{n!} x^n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a, finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, avec $x \geq A$,

$$|\Delta(x)| \leq \varepsilon.$$

On a bien montré

$$e^{-x} f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} \ell.$$

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n pair. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, M n'ayant que des 0 sur sa diagonale et des 1 ou des -1 ailleurs. Montrer que M est inversible.

Solution 4
On fait le calcul dans le cas où M ne comporte que des 1 en dehors de la diagonale : on trouve $1 - n$. On compare ensuite le déterminant dans le cas général et celui du cas particulier précédemment vu : ils ont la même classe modulo 2, donc la même parité... Cf l'exercice 2.

Exercice 5
On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres.
2. Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.
3. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que R est diagonalisable.

Solution 5

1. On trouve $\chi_A = (X-2)^2(X-4)$ donc 2 est valeur propre double de A et 4 est valeur propre simple de A.
   On cherche la dimension de $E_2(A)$. Pour cela, on s'intéresse au rang de $A - 2I_3$:
   $$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On voit immédiatement que ce rang est 1 : la première colonne est non nulle et les deux autres lui sont proportionnelles. Par le théorème du rang, $E_2(A)$ est de dimension 2. Comme $E_4(A)$ est automatiquement de dimension 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres est 3, donc A est diagonalisable.

Son spectre est $\{2, 4\}$.

L'expression de $A - 2I_3$ permet d'affirmer que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de $A - 2I_3$ et donc dans $E_2(A)$. Comme ce dernier est de dimension 2 et que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, ils forment bien une base de $E_2(A)$.

On procède de même pour trouver $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $E_4(A)$.

Finalement,

$$E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_4(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

2. A l'aide de la question précédente, on pose

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   On a $A = PDP^{-1}$.

   On pose alors $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = P\Delta P^{-1}$: on a bien $R^2 = A$.

   Le calcul (demandé ?) donne

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 3\sqrt{2}-6 & -2\sqrt{2}+4 \\ \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}+6 & 2\sqrt{2}-4 \\ \sqrt{2}-2 & -3\sqrt{2}+6 & 4\sqrt{2}-4 \end{pmatrix}.$$

3. A étant diagonalisable, son polynôme minimal est $\pi_A = (X-2)(X-4)$.
   Soit R une racine carrée de A. Comme π_A annule A, π_A annule R^2, i.e.
   $Q = (X^2-2)(X^2-4)$ annule R. Mais $Q = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-2)(X+2)$ est simplement scindé : R est diagonalisable.

Exercice 6
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable.

1. Montrer que M est diagonalisable.

2. Est-ce le cas si on ne suppose pas M inversible ?

Solution 6

1. On note $\lambda_1, \dots \lambda_p$ les valeurs propres de M^2, deux à deux distinctes.
   Comme M est inversible, M^2 l'est aussi et aucun des λ_i ne vaut 0.
   Comme M^2 est diagonalisable, $\pi_{M^2} = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$.
   Ce polynôme annule M^2 et donc $P = \prod\limits_{k=1}^{p} (X^2 - \lambda_k)$ annule M.
   Or, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on peut écrire $\lambda_k = (\mu_k)^2$ avec $\mu_k \neq 0$ et donc
   $$P = \prod_{k=1}^{p} (X - \mu_k)(X + \mu_k)$$
   est simplement scindé et annule M : M est diagonalisable.

2. On prend M la matrice nulle sauf l'élément en haut à droite qui vaut 1 : son carré est nul, donc M^2 est diagonalisable. Pourtant M ne l'est pas puisqu'elle est nilpotente non nulle.

Exercice 7
Un urne contient une boule rouge et une boule blanche. Lorsque l'on pioche une boule, on note sa couleur et on rajoute deux autres boules de la même couleur (en plus de celle piochée que l'on remet). Quelle est la probabilité de piocher indéfiniment une boule rouge ?

Solution 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note R_n l'événement "tirer une boule rouge au n-ième tirage" et T_n l'événement n'obtenir que des boules rouges lors des n premiers tirages. On a donc $T_n = R_1 \cap \dots \cap R_n = T_{n-1} \cap R_n$. On a alors
$$\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(R_n | T_{n-1}) \mathbb{P}(T_{n-1}).$$
Si on n'a tiré que des rouges lors des $n-1$ premiers tirages, l'urne est remplie de $1 + 2(n-1)$ boules rouges et une boule blanche, donc
$$\mathbb{P}(R_n | T_{n-1}) = \frac{2n-1}{2n}.$$
On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(T_n) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$
Par continuité décroissante, on trouve ensuite
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} T_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T_n) = 0.$$
En effet, avec la formule de Stirling $\mathbb{P}(T_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
L'événement "tirer indéfiniment une boule rouge" est donc négligeable.

Exercice 8
On pose $f(x,t) = \dfrac{\ln(t)}{t^x}$ et $K(x) = \int\limits_1^{+\infty} f(x,t) dt$.

1. Montrer que $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(t)}{t} dt$ diverge.

2. Montrer que $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ diverge.

3. Étudier la convergence de $K(x)$ pour

   (a) $x \leq 1$

   (b) $x > 1$

4. Donner l'ensemble de définition de K, noté D_K.

5. Montrer que K est de classe C^1 sur D_K.

6. Calculer $K(x)$ pour tout $x \in D_K$.

Solution 8

1. Notons $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$. f est continue sur $]0, 1]$. Pour $x \in]0, 1]$, on pose $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$. On reconnaît en f la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{2}(\ln(t))^2$, d'où

$$I(x) = -\frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$

   L'intégrale partielle diverge en 0^+, donc $\int\limits_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt$ diverge.

2. $t \mapsto \frac{1}{t}$ est négligeable devant f au voisinage de $+\infty$. Si $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ convergeait, f serait intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $t \mapsto \frac{1}{t}$ aussi par comparaison : contradiction. Donc $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ diverge.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[1, +\infty[$.

   (a) Soit $x \leq 1$. Pour tout $t \geq 1$, $t^x \leq t$ et donc $f(x, t) \geq f(t)$. La question précédente et le théorème de comparaison permettent d'affirmer que $K(x)$ n'est pas définie.

   (b) Soit $x > 1$. $t^{\frac{x+1}{2}} f(x, t) = \frac{\ln(t)}{t^{\frac{x-1}{2}}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{x+1}{2}}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison $t \mapsto f(x, t)$ l'est aussi et $K(x)$ est bien définie.

4. Par la question précédente, $D_K =]1, +\infty[$.

5. On applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.
   • Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   • Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et pour $x \in]1, +\infty[$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{(\ln(t))^2}{t^x}$.
   • Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $t \mapsto -\frac{(\ln(t))^2}{t^x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
   • Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Soit $x \in [a, b]$. Soit $t \in [1, +\infty[$,

$$\left| -\frac{(\ln(t))^2}{t^x} \right| \leq \frac{(\ln(t))^2}{t^a}.$$

   Or $t \mapsto \frac{(\ln(t))^2}{t^a}$ est bien continue sur $[1, +\infty[$ et négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{a+1}{2}}}$, intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $t \mapsto \frac{(\ln(t))^2}{t^a}$ est bien intégrable sur $[1, +\infty[$. On peut conclure que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $K'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{-(\ln(t))^2}{t^x} dt$.

6. Soit $x>1$. On effectue une intégration par parties dans l'expression de $K(x)$ trouvée précédemment. $t\mapsto -(\ln(t))^2$ et $t\mapsto \frac{-x+1}{t^{x-1}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. Leur produit possède une limite nulle en $+\infty$ par croissances comparées. Comme l'intégrale donnée par $K'(x)$ converge, on peut intégrer par parties et on obtient
$$K'(x)=0-0-\int_1^{+\infty}\frac{-2\ln(t)}{t}\left(\frac{1}{(-x+1)t^{x-1}}\right)dt=\frac{-2}{x-1}K(x).$$
On résout l'équation $y'+\frac{2}{x-1}y=0$ sur $]1,+\infty[$. Il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in]1,+\infty[$,
$$K(x)=\frac{\lambda}{(x-1)^2}.$$
Or on sait calculer $K(2)$: par intégration par parties
$$K(2)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}dt=0-0-\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(\frac{-1}{t}\right)dt=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt=1.$$
On a alors $\lambda=1$ et finalement, pour tout $x\in]1,+\infty[$,
$$K(x)=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Exercice 9

Soit $M\in M_n(\mathbb{R})$ avec $\det(M)\neq 0$ et $M^2=M^T$. f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Montrer que $M^4=M$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Calculer $\det(M)$.
4. Montrer que $M\in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
5. Oubliée.

Solution 9

1. $M^4=(M^2)^2=(M^T)^2=(M^2)^T=(M^T)^T=M$.
2. $\det(M)$ est non nul, donc M est inversible : f est bijective.
3. $M^2=M^T$ donne $\det(M)^2=\det(M^T)=\det(M)$. Comme $\det(M)\neq 0$, il vient $\det(M)=1$.
4. $M^4=M$ devient $M^3=I_n$ puisque M est inversible. Or $MM^T=MM^2=M^3$, donc $MM^T=I_n$ et M est une matrice orthogonale. Comme on vient de montrer que son déterminant est $+1$, on en déduit que $M\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
5. Puisque M est orthogonale, le cours nous assure que M est orthogonalement semblable à une matrice N diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux des (1), des (-1) et des R_θ avec $\theta\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$. Mais on a vu que $M^3=I_n$, donc $N^3=I_n$ et donc, il n'y a pas de blocs du type (-1), de même que pour toutes les matrices de rotations R_θ, on a $R_{3\theta}=I_2$. Donc $\theta\equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$, i.e. $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ou $\theta=-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+x)^n} dx$ et $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

1. Montrer que J_n est bien définie, que (J_n) converge et déterminer sa limite.
2. Calculer f_n' et trouver une relation de récurrence pour (J_n).
3. En déduire un équivalent de (J_n).

Solution 10

1. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dominée au voisinage de $+\infty$ par $x \mapsto e^{-x}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc par comparaison f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: J_n est bien définie.
On cherche à appliquer le théorème de convergence dominée.
• Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
• (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : x \mapsto 0$ si $x \neq 0$ et 1 sinon. f est bien continue par morceaux.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$|f_n(x)| \leq e^{-x}.$$
Or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont validées : on peut l'appliquer pour conclure que (J_n) converge vers 0.

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}(1+x+n)$.
D'une part, f_n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et possédant 0 comme limite en $+\infty$, on a $\int_0^{+\infty} f_n' = 0 - f_n(0) = -1$.
D'autre part, par linéarité de l'intégrale,
$$\int_0^{+\infty} f_n' = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+x)^{n+1}}(1+x+n) = -J_n - nJ_{n+1}$$
et finalement,
$$J_n + nJ_{n+1} = 1.$$

3. On a aussi, pour $n \geq 2$,
$$J_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1}J_{n-1} = \frac{1}{n-1} + o\left(\frac{1}{n-1}\right)$$
puisque (J_n) converge vers 0. Finalement
$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Exercice 11
On pose
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$$
où $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$, avec les a_i non tous nuls.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A.
3. Calculer A^2.
4. En déduire le spectre de A et son polynôme caractéristique.

Solution 11

1. A est symétrique réelle, donc diagonalisable.
2. A est de rang 2, puisque l'un des a_i est non nul : supposons que ce soit a_{i_0}. Alors les colonnes 1 et i_0+1 sont indépendantes : le rang vaut au moins 2. Mais toutes les colonnes de 2 à $n+1$ sont liées à celle d'indice i_0+1 : le rang est inférieur ou égal à 2.
3. On trouve, en notant $S = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$,
$$A^2 = \begin{pmatrix} S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1^2 & \cdots & a_1 a_n \\ \vdots & & & \\ 0 & a_n a_1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$
4. On suppose $n \geq 2$.
La question 2 et le théorème du rang permettent d'affirmer que 0 est valeur propre de A et que son sous espace propre est de dimension $n-1 (= n+1-2)$.
Il reste donc deux valeurs propres à déterminer. Comme la trace de A est nulle, la somme des valeurs propres est nulle et donc les deux dernières valeurs propres sont non nulles et opposées. On les note λ et $-\lambda$. Leurs sous-espaces propres respectifs sont de dimension 1.
Le spectre de A^2 est donc $\{0, \lambda^2\}$. Or le calcul de A^2 dans la questions 3 permet de dire que S est valeur propre de A^2, et $S \neq 0$. Donc $S = \lambda^2$.
Finalement, le spectre de A est $\{-\sqrt{S}, 0, \sqrt{S}\}$ et
$$\chi_A = X^{n-2}(X - \sqrt{S})(X + \sqrt{S}) = X^{n-2}(X^2 - S).$$
Si $n = 1$, alors 0 n'est pas valeur propre, mais le reste du raisonnement tient et le spectre de A est $\{-a_1, a_1\}$ et $\chi_A = X^2 - a_1^2$.

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit p un projecteur de E. On note
$$H = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ p = -p \circ f\}.$$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Donner, sans justification, les valeurs propres de p et les sous-espaces propres associés.
3. Soit $f \in H$.
   (a) Montrer que $\ker(p)$ est stable par f.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f et que $f_{|_{\mathrm{Im}(p)}} = 0$.
   (c) En déduire H.

4. On suppose E de dimension finie. Quelle est la dimension de H ?

Solution 12

1. H est non vide : $0_{\mathcal{L}(E)} \in H$.
   Si f et g sont dans H et λ et μ sont dans $\mathbb{R}$, alors
   $$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g) \circ p &= \lambda f \circ p + \mu g \circ p \\ &= -\lambda p \circ f - \mu p \circ g \quad (f \text{ et } g \text{ sont dans } H) \\ &= -p \circ (\lambda f + \mu g) \quad (p \text{ est linéaire})\end{aligned}$$
   Donc $\lambda f + \mu g$ est dans H.
2. Les valeurs propres de p sont 0 et 1 si p n'est ni nul, ni l'identité. Si p est nul, seule 0 est valeur propre et si p est l'identité, seule 1 est valeur propre.
   Le sous espace propre de p associé à 0 est $\ker(p)$ (direction de la projection) et le sous-espace propre de p associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Im}(p)$ (ce sur quoi on projette).
3. (a) Soit $x \in \ker(p)$.
   $$p(f(x)) = (p \circ f)(x) = -(f \circ p)(x) = -f(p(x)) = -f(0) = 0$$
   puisque f est linéaire. $f(x)$ est dans le noyau de p : ce dernier est bien stable par f.

   (b) Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. On écrit $y = p(x)$, avec $x \in E$.
   $$f(y) = f(p(x)) = -p(f(x)) = p(-f(x))$$
   assure que $f(y)$ est dans l'image de p : cette dernière est bien stable par f.
   Par ailleurs, $f(y)$ étant dans l'image de p, $p(f(y)) = f(y)$. Or $p(f(y)) = -f(p(y)) = -f(y)$ puisque $p(y) = y$ sachant que y est dans l'image de p. Il vient $f(y) = -f(y)$, i.e. $f(y) = 0$.

   (c) $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. On note $F = \ker(p)$ et $G = \mathrm{Im}(p)$. On montre que
   $$H = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists g \in \mathcal{L}(F),\ \forall x \in E,\ f(x) = g(y) \text{ avec } x = y + z,\ y \in F,\ z \in G\}.$$
   Les questions précédentes prouvent $\subset$. Montrons l'autre inclusion. On note V l'ensemble de droite.
   Soit $f \in V$. On note g l'endomorphisme de F tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(y)$ si x s'écrit $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$.
   Soit $x \in E$. On écrit $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$. Alors d'une part
   $$(f \circ p)(x) = f(p(x)) = f(0 + z) = g(0) = 0.$$
   D'autre part
   $$(p \circ f)(x) = p(f(x)) = p(g(y)) = 0$$
   car $g(y) \in F$. On a bien $(f \circ p)(x) = -(p \circ f)(x)$. $f \in H$.
4. La question précédente montre que H et $\mathcal{L}(F)$ sont isomorphes. La dimension de H est donc celle de $\mathcal{L}(V)$, i.e. $\dim(V)^2$. Notons n la dimension de E et r le rang de p (ou la dimension de ce sur quoi on projette).
   $$\dim(H) = (n - r)^2.$$

Exercice 13
On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t} dt$. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Quel est le sens de variation de F ?
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Quelle est la limite de F en $+\infty$?
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $F(x) \geq \frac{1}{e} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t} dt$. En déduire le comportement de F en 0^+.

Solution 13

1. Posons $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc intégrable sur le segment $[0,1]$.
   Elle est négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ par croissances comparées ($x > 0$). Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison $t \mapsto f(x,t)$ l'est aussi.
   Ainsi, $F(x)$ est bien définie.

2. Soient x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{e^{-xt^2}}{1+t} \geq \frac{e^{-yt^2}}{1+t}$ et par croissance de l'intégrale, $F(x) \geq F(y)$. F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.
   • $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   • $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto -\frac{t^2}{1+t} e^{-xt^2}$.
   • $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto -\frac{t^2}{1+t} e^{-xt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   • Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in [a,b]$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
   $$\left| -\frac{t^2}{1+t} e^{-xt^2} \right| \leq \frac{t^2}{1+t} e^{-at^2}.$$
   Or $t \mapsto \frac{t^2}{1+t} e^{-at^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc intégrable sur le segment $[0,1]$ et négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées ($a > 0$). On peut donc affirmer, comme précédemment, que $t \mapsto \frac{t^2}{1+t} e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t} e^{-xt^2}.$$
   On retrouve que F est décroissante, puisqu'elle est dérivable et que sa dérivée est négative.

4. On applique la généralisation du théorème de convergence dominée.
   • $\forall x \geq 1$, $t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   • $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{e^{-xt^2}}{1+t} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   • $\forall x \in [1, +\infty[$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$
   $$\left| \frac{e^{-xt^2}}{1+t} \right| \leq e^{-t^2}.$$
   Or $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: elle y est continue, elle est bornée sur $]0,1]$ et elle est dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées.
   Le théorème de convergence dominée assure alors que $F(x)$ converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par relation de Chasles

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt.$$

Tout d'abord, la deuxième intégrale est positive, par positivité de l'intégrale.
Ensuite, pour $t \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, $xt^2 \leq 1$ et donc $e^{-xt^2} \geq e^{-1}$. Alors, par croissance de l'intégrale

$$F(x) \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-1}}{1+t}dt \geq \frac{1}{e}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t}dt.$$

Cette dernière intégrale se calcule, on trouve

$$F(x) \geq \frac{1}{e}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Par minoration, $F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 14
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\frac{1+x}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}}dx.$$

Solution 14
On applique le théorème de convergence dominée.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{e^{-\left(\frac{1+x}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}}dx$.
• Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
•. $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ si $x > 1$, $1/e$ si $x = 1$ et $1/\sqrt{x}$ si $0 < x < 1$.
f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

avec $\varphi : x \mapsto 1/\sqrt{x}$ si $0 < x \leq 1$ et $e^{-\frac{1+x}{2}}$ si $x > 1$.
φ est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de référence $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$) et intégrable sur $[1,+\infty[$ (par linéarité et grâce à la fonction de référence $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$).
On peut donc conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\frac{1+x}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} f = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2.$$

Exercice 15
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres deux à deux distinctes. On pose

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de B ?

2. A quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Solution 15
On remarque tout d'abord que A est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

1. Soit $Z \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On écrit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, avec X et Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$BZ = \lambda Z \quad \Longleftrightarrow \quad Y = \lambda X \text{ et } AX = \lambda^2 X.$$
Les valeurs propres de B sont donc les racines carrées des valeurs propres de A. Si λ est valeur propre de B, λ^2 est valeur propre de A et si $E_{\lambda^2}(A) = \text{Vect}(X_{\lambda^2})$, alors
$$E_\lambda(B) = \text{ Vect}\left(\begin{pmatrix} X_{\lambda^2} \\ \lambda X_{\lambda^2} \end{pmatrix}\right)$$
est aussi une droite vectorielle.

2. Montrons que B est diagonalisable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
On remarque que
$$B^2 = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}.$$
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a donc
$$P(B^2) = \begin{pmatrix} P(A) & 0_n \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$
Supposons dans un premier temps que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On note $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des valeurs propres de A, deux à deux distinctes et strictement positives. Puisque A est diagonalisable, son polynôme minimal, que l'on note π_A, est
$$\pi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$
Comme ce polynôme annule A, $Q = \pi_A(X^2)$ annule B. Or
$$Q = \prod_{i=1}^{n} (X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} \left((X - \sqrt{\lambda_i})(X + \sqrt{\lambda_i})\right).$$
Puisque les λ_i sont strictement positifs et deux à deux distinctes, Q est bien simplement scindé. Comme il annule B, B est diagonalisable.
Réciproquement, supposons B diagonalisable. B^2 est alors aussi diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Avec le calcul précédent de B^2, le spectre de B^2 est celui de A. Donc le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Supposons que 0 soit dans le spectre de A. On note $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les autres valeurs propres de A. Alors, avec la question précédente, le spectre de B est
$$\{-\sqrt{\lambda_n}, \ldots, -\sqrt{\lambda_2}, 0, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\}$$
de cardinal $2n - 1$ et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 : la somme de ces dimensions est donc $2n - 1 < 2n$: B n'est pas diagonalisable. On a une contradiction. Donc 0 n'est pas dans le spectre de A : ce dernier est bien inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16
Soit $a > 1$. On note $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(a)n^a}.$$

1. Vérifier que la loi de X est bien définie.

2. A quelle(s) condition(s) X possède-t-elle une espérance finie ? Dans ce cas, la calculer.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k = k\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X \in A_k)$.
   Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $i \neq j$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(X \in A_i)$ et $(X \in A_j)$ soient indépendants.

Solution 16

1. $\zeta(a)$ est bien défini (série de Riemann). Par linéarité, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X = n)$ converge et sa somme vaut 1 : $\left(\frac{1}{\zeta(a)n^a}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une distribution de probabilité.

2. On s'intéresse à la convergence (absolue) de $\sum_{n\geq 1} n\frac{1}{\zeta(a)n^a} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\zeta(a)n^{a-1}}$. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{a-1}}$ est une nouvelle série de Riemann, convergente si et seulement si $a > 2$. X possède donc une espérance finie si et seulement si $a > 2$.
   Supposons donc que $a > 2$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{\zeta(a)n^a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(a)n^{a-1}} = \frac{\zeta(a-1)}{\zeta(a)}.$$

3.
$$\mathbb{P}(X \in A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(X = kn)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = kn) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(a)(kn)^a} = \frac{1}{k^a}.$$

   Notons m le PPCM de i et de j, par définition

$$(X \in A_i) \cap (X \in A_j) = (X \in A_m).$$

   D'une part,

$$\mathbb{P}((X \in A_i) \cap (X \in A_j)) = \frac{1}{m^a}.$$

   D'autre part,

$$\mathbb{P}(X \in A_i)\mathbb{P}(X \in A_j) = \frac{1}{i^a}\frac{1}{j^a} = \frac{1}{(ij)^a}.$$

   $(X \in A_i)$ et $(X \in A_j)$ sont donc indépendants si et seulement si $m = ij$, i.e. si et seulement si i et j sont premiers entre eux.

Exercice 17
Soit $q \in]-1, 1[$. On pose f continue en 0 telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx)$.

1. Montrer qu'une telle fonction existe et est unique.

2. Montrer que f est développable en série entière et donner son développement en série entière.

Solution 17

1. On procède par analyse synthèse.
Supposons qu'une telle fonction existe, alors pour $x \in]-1,1[$, puisque $qx \in]-1,1[$,

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx) = \frac{1+x}{1-x}\frac{1+qx}{1-qx} f(q^2x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+q^kx}{1-q^kx} f(q^{n+1}x)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par récurrence).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1+q^kx}{1-q^kx}$.
Soit $x \in]-1,1[$, $f_n(x) > 0$, donc on peut prendre son logarithme népérien :

$$\ln(f_n(x)) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+q^kx) - \sum_{k=0}^{n} \ln(1-q^kx).$$

Mais puisque $|q| < 1$, $q^kx \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\ln(1+q^kx) \underset{k\to+\infty}{\sim} q^kx$ et donc $\sum \ln(1+q^kx)$ converge absolument par comparaison à une série géométrique. De même pour $\sum \ln(1-q^kx)$ et donc $\ln(f_n(x))$ possède une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Comme f est continue en 0, $f(q^{n+1}x)$ converge vers $f(0) = 1$ lorsque n tend vers $+\infty$ et finalement

$$f(x) = e^{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^kx) - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^kx)}.$$

ce qui donne l'unicité de f, si f existe.
Réciproquement, posons $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^kx) - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^kx)}$.
On vient de prouver que f est bien définie.
On a bien $f(0) = 1$.
Soit $x \in]-1,1[$.

$$\begin{aligned} f(qx) &= e^{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^{k+1}x) - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^{k+1}x)} \\ &= e^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln(1+q^kx) - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln(1-q^kx)} \\ &= e^{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^kx) - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^kx)} e^{-\ln(1+x)+\ln(1-x)} \\ &= f(x)\frac{1-x}{1+x} \end{aligned}$$

On a donc bien

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx).$$

Il reste à voir que f est continue en 0. L'exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$, cela revient à montrer que

$$g : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^kx) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1-q^kx)$$

est continue en 0. On montrer tout d'abord que

$$h : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+q^kx)$$

est continue en 0. La continuité de la deuxième somme se montrant de la même manière.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n : x \mapsto \ln(1 + q^n x)$.
On va appliquer le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions à la somme de la série $\sum h_n$.
• Chaque h_n est continue sur $]-1, 1[$.
• Soit $[a, b] \subset]-1, 1[$. On pose $M = \max(|a|, |b|)$. $0 \leq M < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [a, b]$.

$$|h_n(x)| \leq |\ln(1 - |q|^k M)| + \ln(1 + |q|^k M).$$

Le membre de droite ne dépend pas de x : h_n est donc bornée sur $[a, b]$ et

$$\|h_n\|_{+\infty,[a,b]} \leq |\ln(1 - |q|^k M)| + \ln(1 + |q|^k M).$$

Par comparaison à une série géométrique, chaque terme du membre de droite est le terme d'une série convergente. On peut donc conclure, par comparaison, que $\sum \|h_n\|_{+\infty,[a,b]}$ converge : $\sum h_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[a, b]$.
On peut appliquer le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions et en déduire que h est continue sur $]-1, 1[$. De même g est continue sur $]-1, 1[$ et finalement f est continue sur $]-1, 1[$ et donc en particulier, f est continue en 0.

2. On procède encore par analyse synthèse. Supposons que f soit développable en série entière sur $]-1, 1[$. On écrit, pour tout $x \in]-1, 1[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Pour $x \in]-1, 1[$, $(1 - x)f(x) = (1 + x)f(qx)$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^{n+1}$$

ce qui devient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_n q^n - a_{n-1} - a_{n-1} q^{n-1}) x^n = 0.$$

ceci étant vrai pour tout $x \in]-1, 1[$, par unicité d'un développement en série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n - a_n q^n - a_{n-1} - a_{n-1} q^{n-1} = 0 \quad \text{ou encore} \quad a_n = \frac{1 + q^{n-1}}{1 - q^n} a_{n-1}.$$

On a alors par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (puisque $1 = f(0) = a_0$)

$$a_n = \frac{2}{1 + q^n} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 + q^k}{1 - q^k} \right).$$

On effectue donc maintenant la synthèse. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2}{1 + q^n} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 + q^k}{1 - q^k} \right).$$

Comme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1.
On note S sa somme. Elle est définie sur $]-1, 1[$. Elle est bien continue en 0, vaut 1 en 0.
La relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 + q^{n-1}}{1 - q^n} a_{n-1}$$

permet de montrer (en remontant les calculs précédents) que pour tout $x \in]-1,1[$

$$(1-x)S(x) = (1+x)S(qx) \qquad \text{ou encore} \qquad S(x) = \frac{1+x}{1-x}S(qx).$$

L'unicité prouvée à la question précédente permet de dire que $f = S$ et donc f est bien développable en série entière sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1+q^n} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+q^k}{1-q^k}\right) x^n.$$

Exercice 18
Soit f l'unique solution sur $[0,1[$, de

$$\begin{cases} (1-x)y'' &= y \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

Montrer que f est positive sur $]0,1[$. On pourra utiliser $g = ff'$.

Solution 18
f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1[$ (équation normalisable). g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
Pour $x \in [0,1[$,

$$g'(x) = f'(x)^2 + f(x)f''(x) = f'(x)^2 + (1-x)f''(x)^2 \geq 0.$$

g est donc croissante sur $[0,1[$ et comme $g(0) = 0$, g est positive sur $[0,1[$.
Les conditions initiales donnent,

$$f(t) = t + o(t) \quad [t \to 0]$$

et donc f est strictement positive au voisinage à droite de 0 : il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, x_0]$.
On suppose qu'il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que $f(x_1) < 0$. Alors $x_0 < x_1$. On pose

$$i = \inf\{x \in]x_0, 1[,\ f(x) = 0\}.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, cet ensemble est non vide, comme il est minoré par x_0, i est bien définie.
Par continuité (à droite) de f en i, $f(i) = 0$ et pour tout $t \in]0, i[$, $f(t) > 0$ et donc $f'(t) \geq 0$: f est croissante sur $]0, i[$. Comm elle est continue sur $[0, i]$, on en déduit que $f(i) \geq f(x_0) > 0$: contradiction. Il n'existe donc pas de x_1 tel que $f(x_1) < 0$: f reste positive sur $]0,1[$.

Exercice 19
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in E^n$ telles que

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad (x_i|x_j) = (y_i|y_j).$$

Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si $(y_1, \ldots, y_n)$ est libre.

Solution 19
On pose

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \cdots & (x_1|x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_n|x_1) & \cdots & (x_n|x_n) \end{vmatrix}.$$

Montrons que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.
Comme $G(x_1, \dots, x_n) = G(y_1, \dots, y_n)$, on pourra alors conclure.
Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On note m sa dimension. On choisit une base orthonormée de F, notée $\mathcal{B}$. On note, pour $j = 1 \cdots n$, X_j la matrice représentative de x_j dans $\mathcal{B}$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(x_i|x_j) = X_i^T X_j$.
Posons M la matrice carrée de taille n dont les colonnes sont les X_j. M est une matrice de taille $m \times n$.
On pose $S = M^T M$, carrée de taille n, de telle sorte que $G(x_1, \dots, x_n) = \det(S)$.
S est clairement symétrique. Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X^T S X = \|MX\|^2 \geq 0$: S est symétrique positive.
$X^T S X = 0$ si et seulement si $MX = 0$, donc S est définie positive si et seulement si $\ker(M) = \{0\}$.
Mais, d'une part, S définie positive est équivalent à S inversible, i.e. $\det(S) \neq 0$ ou encore $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.
D'autre part, $\ker(M) = \{0\}$ est équivalent à $(x_1, \dots, x_n)$ libre.
On peut donc conclure.
Autre version
On suppose $(x_1, \dots, x_n)$ libre. Montrons que $(y_1, \dots, y_n)$ est libre. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = 0$. Alors pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k | y_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (y_k|y_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k|x_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k | x_j \right).$$

Posons $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ et $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ étant libre, c'est une base de F. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $(x|x_j) = 0$, donc $x = 0$. Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, tous les scalaires α_k sont nuls : $(y_1, \dots, y_n)$ est libre.

Exercice 20
Trouver les solutions de

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

sur $\mathbb{R}_+^*$, ayant une limite en 0^+.

Solution 20
On résout l'équation. Pour ce faire on commence par résoudre l'équation homogène associée, puis on trouve une solution particulière par la méthode de variation des constantes.
Pour l'équation homogène associée, on résout l'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$. Elle possède une unique solution, -1, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est le plan vectoriel engendré par $\varphi : x \mapsto e^{-x}$ et par $\psi : x \mapsto x e^{-x}$.
On cherche ensuite une solution de la forme : $x \mapsto \lambda(x)\varphi(x) + \mu(x)\psi(x)$ avec λ et μ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et satisfaisant les conditions

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \lambda'(x)e^{-x} + \mu'(x)xe^{-x} & = & 0 \\ -\lambda'(x)e^{-x} + \mu'(x)(1-x)e^{-x} & = & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \lambda'(x) + \mu'(x)x & = & 0 \\ \mu'(x) & = & \frac{e^x}{\sqrt{x}} \end{cases}.$$

On choisit donc

$$\mu : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} e^{u^2} du$$

et
$$\lambda\ :\ x \mapsto -\int_1^x \sqrt{t}e^t dt = -\int_1^{\sqrt{x}} ue^{u^2} 2udu = -\sqrt{x}e^x + e + \int_1^{\sqrt{x}} e^{u^2} du$$
par changement de variable puis intégration par parties.
Comme les contraintes portent sur λ' on peut enlever la constante e.
Finalement, la méthode de variation des constantes assure que
$$f_0\ :\ x \mapsto -\sqrt{x} + (2x+1)e^{-x} \int_1^{\sqrt{x}} e^{u^2} du$$
est solution de (E).
Les solutions de (E) sont donc de la forme :
$$x \mapsto -\sqrt{x} + (2x+1)e^{-x} \int_1^{\sqrt{x}} e^{u^2} du + \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x}$$
avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Comme $\int_0^1 e^{u^2} du$ converge (fonction continue sur un segment), on constate que toutes les solutions ont une limite en 0^+.

Exercice 21
Soit $M \in O_p(\mathbb{R})$. Pour $n \geq 1$, on pose
$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M^k.$$

1. Trouver la limite de la suite $(A_n X)$ si X est un point fixe de M.
2. Montrer que $\mathbb{R}^p = \ker(M - I_p) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(M - I_p)$.
3. Trouver la limite de la suite $(A_n X)$ si $X \in \mathrm{Im}(M - I_p)$.
4. Etudier la suite (A_n).

Solution 21

1. Si $MX = X$ alors $\forall n,\ A_n X = X$ et la suite est convergente de limite X.
2. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M, qui est un automorphisme orthogonal, et $v = u - \mathrm{Id}$ (de matrice $M - I_p$).
   Soient $y = v(x) \in \mathrm{Im}(v)$ et $z \in \ker(v)$. On a (noter que $u(z) = z$ car $v(z) = 0$)
   $$(y|z) = (u(x) - x|z) = (u(x)|z) - (x|z) = (u(x)|u(z)) - (x|z) = (x|z) - (x|z) = 0$$
   Ainsi $\mathrm{Im}(v)$ et $\ker(v)$ sont orthogonaux. Ils sont donc en somme directe. Par théorème du rang et un argument de dimension, ils sont donc supplémentaires. Ils sont finalement supplémentaires orthogonaux. On a donc
   $$\mathbb{R}^p = \ker(M - I_p) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(M - I_p)$$
3. Soit $z = v(a) = u(a) - a \in \mathrm{Im}(v)$.
   $$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u^{k+1}(a) - u^k(a)) = \frac{u^n(a)}{n} - \frac{a}{n}$$
   Comme u conserve la norme, $\|u^n(a)\| = \|a\|$ et le membre de droite est de limite nulle. En revenant aux matrices,
   $$\forall X \in \mathrm{Im}(M - I_p),\ \lim_{n \to +\infty} A_n X = 0$$

4. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On peut donc décomposer $X = Y + Z$ avec $Y \in \ker(M - I_p)$ et $Z \in \operatorname{Im}(M - I_p)$. Les questions précédentes montrent que $A_nX = A_nY + A_nZ$ converge vers Y qui est le projeté orthogonal de X sur $\ker(M - I_p)$.
   Pour chaque vecteur E_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on convergence de A_nE_i qui est la colonne numéro i de A_n et donc convergence de chaque suite coordonnées de A_n. Ainsi, (A_n) converge. Sa limite est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\ker(M - I_p)$.

Exercice 22

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

2. On note f sa somme, justifier que f est définie et continue sur $[-1, 1[$.

3. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer f.

Solution 22

1. La série diverge pour $x = 1$ (Riemann) et converge pour $x = -1$ (théorème spécial à certaines séries alternées). La rayon de convergence est donc $R = 1$.

2. Avec ce qui précède la somme est définie sur $[-1, 1[$. Elle est continue sur $]-1, 1[$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence 1 et elle est continue en -1 par le théorème d'Abel radial.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on peut effectuer le changement de variable $x = \sqrt{n}y$ dans l'intégrale donnée et on obtient :
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-ny^2}\sqrt{n}dy.$$
   On peut donc écrire
$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-ny^2}dy$$
   et donc, pour $x \in]-1, 1[$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-ny^2}dyx^n.$$
   On cherche alors à intervertir la somme et l'intégrale.
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : y \mapsto e^{-ny^2}x^n$.
   • Chaque f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   • $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et sa somme est $y \mapsto \frac{xe^{-y^2}}{1-xe^{-y^2}}$ qui est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.
   • Avec $I_n = \int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geq 1} I_n$ converge car $|x| < 1$.
   On peut donc intervertir la somme et l'intégrale. On trouve
$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-y^2}}{1 - xe^{-y^2}}dy.$$