MINES TELECOM

Planche 1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Notons π le polynôme minimal de u.
Montrer que $P(u)$ est bijectif si et seulement si P et π sont premiers entre eux.

Solution 1

Supposons que P et π soient premiers entre eux. Par la relation de Bézout, il existe A et B dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $AP + B\pi = 1$. Alors, $A(u) \circ P(u) + B(u) \circ \pi(u) = \mathrm{Id}_E$. Et comme $\pi(u) = 0$, on a $A(u) \circ P(u) = \mathrm{Id}_E$ et donc $P(u)$ est bijectif (a priori injectif, mais c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie).
Supposons maintenant que $P(u)$ soit bijectif. Montrons que P et π sont premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde. P et π n'étant pas premiers entre eux, il existe un polynôme premier qui est un diviseur commun de P et de π. Comme les polynômes sont à coefficients complexes, ce polynôme premier est de la forme $X - a$ avec $a \in \mathbb{C}$. Comme $X - a$ divise π, a est racine de π et donc a est valeur propre de u : $u - a\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif. Or on peut écrire $P = Q(X - a)$ et donc $P(u) = Q(u) \circ (u - a\mathrm{Id}_E)$ est bijectif, donc $u - a\mathrm{Id}_E$ est injectif : contradiction.

Planche 2

On étudie la série entière $\sum \ln(n)x^n$. On note u sa somme.

1. Donner le rayon de convergence de cette série entière.
2. Développer en série entière $x \mapsto (1-x)u(x) + \ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.
3. Montrer que cette dernière série entière converge normalement sur $[-1,1]$. En déduire un équivalent en 1^- de $u(x)$.

Solution 2

1. En $x = 1$, la série $\sum \ln(n)x^n$ diverge grossièrement, donc $R \leq 1$.
   Pour $x \in]0,1[$, $\ln(n)x^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $x \leq R$. Avec $x \to 1^-$, à la limite, $R \geq 1$ et finalement, $R = 1$.
2. Pour $x \in]-1,1[$,

$$(1-x)u(x) + \ln(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$$

$$(1-x)u(x) + \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n-1)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n.$$

$$(1-x)u(x) + \ln(1-x) = -x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right)x^n.$$

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$ et $a_1 = -1$. On a $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$: $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge absolument.
   Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$. f_n est continue sur $[-1, 1]$ et $\|f_n\|_\infty \leq |a_n|$.
   Ce qui précède permet d'affirmer la convergence normale de $\sum f_n$ et donc sa somme, notée f, est continue sur $[-1, 1]$, en particulier, elle possède une limite finie en 1^-.
   On a alors, pour $x \in]-1, 1[$, $u(x) = \frac{f(x) - \ln(1-x)}{1-x}$. Mais comme $\ln(1-x)$ diverge vers $-\infty$ en 1^-, f est négligeable devant $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 1^- et finalement,
   $$u(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

Planche 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}} dt$.

1. Trouver la limite de (I_n). On la notera a.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2(I_n - a)$. Etudier la limite de (u_n).

Solution 3

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}}$.
   f_n est continue sur $[0, 1]$, donc I_n est bien définie.
   Pour $t \in [0, 1[$, on peut réécrire $f_n(t) = \frac{1-t}{1-t^n}$. On en déduit donc que $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} 1 - t$. Comme $f_n(1) = \frac{1}{n}$, $f_n(1) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 = 1 - 1$. On peut donc conclure que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$, vers $f : t \mapsto 1 - t$, qui est continue sur $[0, 1]$.
   Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(t) \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0, 1]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que (I_n) converge vers $a = \int_0^1 f = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Réécrivons u_n, par linéarité de l'intégrale
   $$u_n = n^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)\right) dt = n^2 \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-t^n} - (1-t)\right) dt = n^2 \int_0^1 t^n \frac{1-t}{1-t^n} dt.$$
   On effectue alors le changement de variable $x = t^n$, sachant que $t \mapsto t^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante de $[0, 1[$ sur $[0, 1[$, on obtient alors
   $$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1-x} n x^{1/n}(1 - x^{1/n}) dx.$$
   Par intégration par parties avec $u : x \mapsto -\ln(1-x)$ et $v : x \mapsto n x^{1/n}(1 - x^{1/n})$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et leur produit convergeant vers 0 en 1, par croissances comparées (après changement de variable $y = 1 - x$ et développement limité en 0 pour y). On obtient alors
   $$u_n = \int_0^1 \ln(1-x) x^{1/n-1}(1 - 2x^{1/n}) dx.$$
   Posons $g_n : x \mapsto \ln(1-x) x^{1/n-1}(1 - 2x^{1/n})$, continue sur $[0, 1[$.
   (g_n) converge simplement sur $]0, 1[$ vers $g : x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x}$, continue sur $]0, 1[$.
   Pour $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$|g_n(x)| \leq -3 \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Or, g est intégrable sur $]0,1[$ (continue sur $]0,1[$, équivalente à $x \mapsto 1$ en 0 et dominée par $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ en 1, qui est bien intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$).
On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx.$$

On peut calculer cette intégrale en utilisant le développement en série entière de $x \mapsto -\ln(1-x)$ et en appliquant le théorème d'intégration terme à terme. On trouve

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit que

$$I_n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n^2}.$$

Planche 4
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec B nilpotente et $AB = BA$. Montrer que $\det(I_n + B) = 1$, puis que $\det(A + B) = \det(A)$. *On pourra commencer par supposer A inversible.*

Solution 4 B est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Notons T une telle matrice et P inversible telle que $B = PTP^{-1}$. On a

$$\det(I_n + B) = \det(P(I_n + T)P^{-1}) = \det(I_n + T) = 1.$$

Supposons A inversible. On a alors

$$\det(A + B) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}B).$$

Mais $A^{-1}B$ est nilpotente, car si $p \in \mathbb{N}$ vérifie $B^p = 0$, alors comme $(A^{-1}B)^p = (A^{-1})^p B^p = 0$ car A et B commutent. La première partie de la question donne $\det(I_n + A^{-1}B) = 1$ et donc

$$\det(A + B) = \det(A).$$

Mais $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (fait en exemple dans le cours de topologie), on conclut par continuité du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Planche 5
$g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n+inx}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que g n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Solution 5

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : x \mapsto e^{-n+inx}$. g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $l \in \mathbb{N}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $g_n^{(l)}(x) = (in)^l e^{-n+inx}$. On a donc $\|g_n\|_\infty = n^l e^{-n}$. Comme $n^2 n^l e^{-n}$ tend vers 0 par croissances comparées, $\sum \|g_n\|_\infty$ converge, i.e. $g_n^{(l)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (in)^l e^{-n+inx}$.

2. Supposons que g soit développable en série entière au voisinage de 0 : il existe $r > 0$ et (a_n) tels que pour tout $x \in]-r, r[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait qu'alors pour $l \in \mathbb{N}$, $a_l = \frac{g^{(l)}(0)}{l!}$. Donc, $a_l = \frac{i^l}{l!} \sum_{n=0}^{+\infty} n^l e^{-n}$. On remarque que $|a_l| = \frac{1}{l!} \sum_{n=0}^{+\infty} n^l e^{-n} \geq \frac{l^l}{l! e^l}$. Or ce dernier terme est équivalent (formule de Stirling) à $\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}$. Or la série entière $\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} x^l$ a pour rayon de convergence 1, donc $\sum a_l x^l$ a un rayon de convergence inférieur ou égal à 1 : g n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
   On peut montrer qu'elle est développable en série entière sur $]-1, 1[$ en étudiant la série double $(u_{n,k}) = \left(\frac{e^{-n} i^k n^k x^k}{k!} \right)$. Elle est sommable, car $\sum_{k \geq 0} |u_{n,k}|$ converge et sa somme est $e^{n(-1+|x|)}$ et comme $-1 + |x| < 0$, $e^{n(-1+|x|)}$ est bien le terme général d'une série convergente. On conclut par le théorème de sommation par paquets pour les séries doubles à valeurs positives. On a alors, par le théorème de sommation par paquets pour les séries doubles,
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$
   et donc
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^k \right) x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k n^k x^k}{k!} = g(x).$$
   On a ainsi montré que g est développable en séries entière sur $]-1, 1[$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Planche 6

Soit f un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f_{|\mathbb{Z}}$ et $f_{|\mathbb{Q}}$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est monotone.
4. Déterminer f.

Solution 6

1. f étant un morphisme de groupe, $f(0) = 0$. f étant un morphisme d'anneau, $f(1) = 1$.
   On montre ensuite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $f(n) = n$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 = f(0) = f(n-n) = f(n) + f(-n)$ et donc $f(-n) = -f(n)$. On a donc $f(p) = p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. On montre de même que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(px) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
   Soit $r \in \mathbb{Q}$. $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a $p = f(p) = f(qr) = qf(r)$, donc $f(r) = \frac{p}{q} = r$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$ et donc $f(x) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. On pose $z = y - x \in \mathbb{R}_+$. Avec la question précédente, on a $f(y) = f(x + z) = f(x) + f(z) \geq f(x)$. On a bien montré que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc deux suites (a_n) et (b_n) de rationnels telles que (a_n) soit croissante, (b_n) décroissante et toutes les deux convergent vers x. Alors, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$, par croissance de f, $f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$. La première question donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq f(x) \leq b_n$. Par encadrement, on conclut que $f(x) = x$.
   On a donc montré que f est l'identité.

Planche 7
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue et bornée. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$.

Solution 7
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dominée par $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f_n l'est aussi. Elle est intégrable sur $[0, 1]$ par continuité et donc $I_n = \int_0^{+\infty} f_n$ est bien définie.
On effectue le changement de variable $u = nx$. ($x \mapsto nx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.) On a ainsi

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2} du.$$

On applique alors le théorème de convergence dominée.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : u \mapsto \frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+u^2}$. g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par continuité de f en 0, (g_n) converge simplement vers $u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leq M$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $|g_n(u)| \leq \frac{M}{1+u^2}$ et $u \mapsto \frac{M}{1+u^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = f(0) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi f(0)}{2}.$$

Planche 8
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 0$, $A^n \neq 0$. A est-elle diagonalisable ?

Solution 8
A est trigonalisable, puisqu'il s'agit d'une matrice complexe (son polynôme caractéristique est scindé).
Comme le rang de A est 2, par le théorème du rang, le noyau de A est de dimension $n - 2$, donc, si $n \geq 3$, 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 2$. A est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure, avec $n - 2$ 0 sur la diagonale et deux (autres) valeurs complexes, λ_1 et λ_2.
Comme la trace de A est nulle et comme la trace est un invariant de similitude, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, i.e. $\lambda_2 = -\lambda_1$.
Si $\lambda_1 = 0$, le polynôme caractéristique de A est X^n et par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$: contradiction. Donc $\lambda_1 \neq 0$.
On a donc $\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda_1)(X + \lambda_1)$. Les sous espaces propres associés aux valeurs propres λ_1 et $-\lambda_1$ sont de dimension 1 et on a vu que le sous-espaces propre associé à la valeur propre 0 est de dimension $n - 2$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est n : A est diagonalisable.
Si $n = 2$, la fin du raisonnement est encore valable (2 valeurs propres distinctes et A de taille 2).

Planche 9
Sous forme décimale, $(2021)!$ se termine par combien de 0 ?

Solution 9
On cherche le nombre de fois où 10 apparaît en facteur dans $(2021)!$. On peut aussi chercher la valuation de 2 et celle de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de $(2021)!$. Le minimum des deux sera le nombre de fois où 10 sera en facteur, et donc le nombre de 0 cherché.

$$(2021)! = \prod_{k=1}^{2021} k = \prod_{k=1}^{1010}(2k)\prod_{k=0}^{1010}(2k+1) = 2^{1010}(1010)!\prod_{k=0}^{1010}(2k+1)$$

et donc $\mathrm{vp}_2((2021)!) = 1010 + \mathrm{vp}_2((1010)!)$.
En itérant le processus, on obtient

$$\mathrm{vp}_2((2021)!) = 1010 + 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2013.$$

On procède de même avec les multiples de 5 : $\mathrm{vp}_5((2021)!) = 404 + \mathrm{vp}_2((404)!)$.
En itérant le processus, on obtient

$$\mathrm{vp}_5((2021)!) = 404 + 80 + 16 + 3 = 503.$$

$(2021)!$ finit donc par 503 zéros.

Planche 10
Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_{2n}[X] \to \mathbb{R}[X]$ tel que pour $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$, $\varphi(P) = X(X+1)P' - 2kXP$.

1. Trouver k pour que φ soit un endomorphisme.

2. Trouver les valeurs propres de φ et les sous-espaces propres associés.

Solution 10

1. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. Ecrivons $P = \lambda X^{2n} + R_n$ avec $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On a alors

   $$\varphi(P) = 2n\lambda X^{2n+1} + X^2R_n' + 2n\lambda X^{2n} + XR_n' - 2k\lambda X^{2n+1} - 2kXR_n = 2\lambda(n-k)X^{2n+1} + S_n$$

   avec $S_n \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. On choisit alors $k = n$. On aura bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.
   Par ailleurs, φ est bien linéaire, par linéarité de la dérivation et par propriétés des opérations sur les polynômes.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. On s'intéresse à l'équation $\varphi(P) = \lambda P$. On arrive ainsi à l'équation $X(X+1)P' - (2nX + \lambda)P = 0$.
   On s'intéresse donc à l'équation différentielle (E) sur $]0,1[$

   $$y' - \frac{2nx+\lambda}{x(x+1)}y = 0.$$

   On décompose donc $F = \frac{2nX+\lambda}{X(X+1)}$ en éléments simples pour trouver une primitive de
   $x \mapsto \frac{2nx+\lambda}{x(x+1)}$. On doit distinguer trois cas.

$\lambda = 0$. Alors $F = \frac{2n}{X+1}$. Une primitive est donc $x \mapsto 2n\ln(x+1)$ et l'ensemble des solutions de (E) est la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto (x+1)^{2n}$. Le polynôme $P_0 = (X+1)^{2n}$ vérifie donc $\varphi(P_0)(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[$ et donc $\varphi(P_0) = 0$: 0 est valeur propre de φ et P_0 en est un vecteur propre.
$\lambda = 2n$, alors $F = \frac{2n}{X}$ et de même $P_{2n} = X^{2n}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $2n$.
Sinon, on a $F = \frac{\lambda}{X} + \frac{2n-\lambda}{X+1}$ et l'ensemble des solutions de (E) est la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto x^\lambda (x+1)^{2n-\lambda}$. On trouve donc, pour $k = 1 \cdots 2n-1$ que
$P_k = X^k(X+1)^{2n-k}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre k. On a donc trouvé $2n+1$ valeurs propres ($[\![0, 2n]\!]$) : φ est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 (pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, $E_k(\varphi) = \mathrm{Vect}(P_k)$.

Planche 11
Déterminer la nature de la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^\alpha}{a(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$$

avec $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution 11
Faisons une distinction de cas suivant la position de a par rapport à 1.
Si $a = 1$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^\alpha}{2^n}$. Donc $n^2 u_n$ converge vers 0 par croissances comparées. Par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.
Si $a > 1$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{n^\alpha}{2^n}$. Par l'étude précédente, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^\alpha}{2^n}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.
Si $a < 1$ Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (1+a^k)$. On a $\ln(v_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+a^k)$. Comme $a \in [0,1[$, a^n converge vers 0 et $\ln(1+a^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$. Comme $\sum a^n$ converge (série géométrique), par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \ln(1+a^n)$ converge et donc la suite $(\ln(v_n))$ converge. Notons l sa limite. Alors (v_n) converge vers e^l. On a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{ae^l}$. Or $\sum\limits_{n\geq 1} n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < -1$ et comme $\frac{1}{ae^l} \neq 0$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^\alpha}{ae^l}$ converge si et seulement si $\alpha < -1$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Planche 12
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AA^T et A^TA sont semblables.

Solution 12
Posons $M = AA^T$ et $N = A^TA$. Ces deux matrices sont symétriques réelles. Elles sont donc diagonalisables (théorème spectral). Pour montrer qu'elles sont semblables, il suffit de montrer qu'elles ont les mêmes valeurs propres, comptées avec multiplicité ; ou encore qu'elles ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés sont de même dimension.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$ et donc $AA^TX = \lambda X$. En

composant par A^T à gauche, on obtient, $A^TAA^TX = \lambda A^TX$.
Si $A^TX \neq 0$, alors λ est valeur propre de N (et A^TX est un vecteur propre associé).
Si $A^TX = 0$, alors $MX = 0$ et donc $\lambda = 0$. Dans ce cas, A^T n'est pas inversible, mais alors N non plus (déterminant) : dans tous les cas λ est dans le spectre de N.
De la même manière, on montre que toute valeur propre de N est valeur propre de M.
M et N ont donc le même spectre. Regardons la dimension des sous-espaces propres.
Pour $\lambda \neq 0$, ce qui précède nous incite à poser $\varphi : E_\lambda(AA^T) \to E_\lambda(A^TA)$, $X \mapsto A^TX$. On a vu que φ est bien défini. Clairement φ est linéaire. Montrons que c'est un isomorphisme.
Soit X dans le noyau de φ. Alors $A^TX = 0$, donc $AA^TX = 0$, or $AA^TX = \lambda X$, donc $\lambda X = 0$. Mais comme $\lambda \neq 0$, $X = 0$: φ est injectif.
Soit $Y \in E_\lambda(A^TA)$. Posons $X = \frac{1}{\lambda}AY$. Alors $AA^TX = \frac{1}{\lambda}AA^TAY = AY = \lambda X$. Donc $X \in E_\lambda(AA^T)$.
On a $\varphi(X) = \frac{1}{\lambda}A^TAY = Y$. On a montré que φ est surjectif.
φ étant un isomorphisme, $E_\lambda(AA^T)$ et $E_\lambda(A^TA)$ sont de même dimension.
Il reste à voir ce qui se passe pour $E_0(AA^T)$ et $E_0(AA^T)$.
Soit $X \in E_0(AA^T)$. Alors $AA^TX = 0$, en multipliant par X^T à gauche, $\|A^TX\|^2 = 0$ et donc $A^TX = 0$. De même, si $A^TX = 0$, alors $X \in E_0(AA^T)$. Donc le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0 est le noyau de A^T. On montre de même que le sous-espace propre de N associé à la valeur propre 0 est le noyau de A. Or A et A^T ont le même rang et donc par théorème du rang, leurs noyaux ont la même dimension.

On remarque aussi que les valeurs propres de M et N sont positives. En effet, si λ est une valeur propre de M par exemple, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$ et donc
$AA^TX = \lambda X$. En multipliant par X^T à gauche, on obtient $X^TAA^TX = \lambda X^TX$, i.e.
$\|A^TX\|^2 = \lambda\|X\|^2$ et finalement, $\lambda = \frac{\|A^TX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

Planche 13
Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X sachant $(Y = n)$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{3}\right)$. Déterminer la loi de X.

Solution 13
Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid Y = n)\mathbb{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \frac{2^n}{n!} e^{-2} \\
&= e^{-2} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{2^{2n-k}}{3^n} \\
&= \frac{e^{-2}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{2^{2n+k}}{3^{n+k}} \\
&= \frac{e^{-2}2^k}{k!3^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{4}{3}\right)^n \\
&= e^{-2/3} \frac{(2/3)^k}{k!}
\end{aligned}$$

X suit donc une loi de Poisson de paramètre $2/3$.

Planche 14

Soient A et B deux matrices colonnes comportant le même nombre de lignes. On pose $M = AB^T + BA^T$. Déterminer le rang de M. Déterminer les éléments propres de M.

Solution 14

Soit n le nombre de lignes de A et B. Alors $M \in \mathcal{M}_n(K)$.
Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $M = 0$ et $\mathrm{rg}(M) = 0$.
Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, on distingue le cas (A, B) liée de celui où (A, B) est libre.
Supposons (A, B) liée. Comme $A \neq 0$, il existe $\lambda \in K$ tel que $B = \lambda A$ (et comme $B \neq 0$, $\lambda \neq 0$). Alors $M = 2\lambda AA^T$. Toutes les colonnes de M sont proportionnelles à A, donc le rang de M est inférieur ou égal à 1. S'il était nul, la trace de M serait nulle. Or sa trace est $2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ si on note a_k les éléments de A. Or $\lambda \neq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \neq 0$, sinon tous les a_k seraient nuls et $A = 0$: ce qui n'est pas. Donc $rg(M) = 1$.
Supposons maintenant que (A, B) soit libre. Alors, en notant b_k les éléments de B, les colonnes de M sont les $b_kA + a_kB$. Toutes ces colonnes sont dans le plan vectoriel engendré par (A, B) et donc le rang de M est inférieur ou égal à 2.
S'il était nul, on aurait $b_kA + a_kB = 0$ pour tout k et en choisissant un k tel que $a_k \neq 0$ ou $b_k \neq 0$, alors (A, B) serait liée, ce qui n'est pas. Donc le rang de M n'est pas 0.
S'il était 1, en supposant, par exemple que la première colonne de M ne soit pas nulle, alors toutes les autres colonnes seraient proportionnelles à la première. Pour $k = 2 \cdots n$, il existerait $\gamma_k \in K$ tel que $b_kA + a_kB = \gamma_k(b_1A + a_1B)$ et donc, $(b_k - \gamma_kb_1)A + (a_k - \gamma_ka_1)B = 0$ et comme (A, B) est libre, pour $k = 2 \cdots n$, $b_k - \gamma_kb_1 = 0$ et $a_k - \gamma_ka_1 = 0$ et donc $A = a_1C$ et $B = b_1C$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$. Ce qui contredit à nouveau le caractère libre de (A, B). Donc le rang de M n'est pas 1.
On en déduit que le rang de M est 2.
On reprend la distinction des 3 cas.
Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $M = 0$. Le spectre de M est le singleton 0 et le sous-espace propre associé est $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.
Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et (A, B) liée. Il existe $\lambda \in K$ non nul tel que $B = \lambda A$.
On a vu que M est de rang 1. Son noyau est donc de dimension $n - 1$: 0 est valeur propre de M et son sous-espace propre est de dimension $n - 1$. C'est l'hyperplan d'équation $A^TX = 0$.
On remarque que $MA = 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2 A$: $2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ est la dernière valeur propre (elle est bien non nulle) et son sous-espace propre est la droite vectorielle engendrée par A.
Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et (A, B) libre.
On a vu que M est de rang 2. Son noyau est donc de dimension $n - 2$: 0 est valeur propre de M et son sous-espace propre est de dimension $n - 2$. C'est l'intersection des deux hyperplans d'équation $A^TX = 0$ et $B^TX = 0$.
On vérifie que le plan engendré par A et B est stable par M. ($MA = B^TA.A + A^TA.B$ et $MB = B^TB.A + A^TB.B$). On s'intéresse donc à l'endomorphisme induit par M sur le plan vectoriel engendré par A et B. Notons $r = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$, $s = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ et $t = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ en reprenant les notations précédemment

utilisées. La matrice représentative de cet endomorphisme est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & r \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - 2rX + r^2 - st = (X-r)^2 - st$. Comme $st > 0$, ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples. On note λ_1 et λ_2 ses deux racines ($\lambda_1 = r - \sqrt{st}$, $\lambda_2 = r + \sqrt{st}$). Alors λ_1 et λ_2 sont aussi des valeurs propres de M et on vérifie que les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles engendrées par $sA + (\lambda_1 - r)B$ et $sA + (\lambda_2 - r)B$ respectivement.
On a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
Dans tous les cas, M est diagonalisable.

Planche 15

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. A est-elle inversible ?

2. A est-elle diagonalisable ?

Solution 15

1. $\det(A) = 2a$. A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

2. $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-a)$.
   Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$, alors χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
   Si $a = 1$, alors $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$. $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, par le théorème du rang son noyau est de dimension 1 et donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $1 \neq 2$. Donc A n'est pas diagonalisable.
   Si $a = 2$, alors $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, par le théorème du rang son noyau est de dimension 2 et donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2. Comme le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, A est diagonalisable.
   Pour conclure, A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

Planche 16

Soit $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Quel est le domaine de définition D de S ?

2. Exprimer S pour $x \in D$.

3. Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Calculer $\int_0^{+\infty} S(x)dx$.

Solution 16

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives.
   Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \geq \frac{1}{n}$. Or $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge : par comparaison, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge.
   Pour $x > 0$, $n^2 f_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.
   Le domaine de définition de S est $D = \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $e^{-x} \in [0, 1[$, on reconnaît
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n} = -\ln(1 - e^{-x}).$$

3. S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Comme $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ et donc $S(x)$ est négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et S est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison.
   Au voisinage de 0, $1 - e^{-x}$ tend vers 0 et donc $S(x)$ est négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-e^{-x}}}$ et donc négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$ par comparaison.
   Finalement, S est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Notons $I = \int_0^{+\infty} S(x)dx$. On effectue le changement de variable $y = 1 - e^{-x}$. $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0, 1[$. On obtient
$$I = -\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y} dy = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(y) y^n dy.$$
   On applique le théorème d'intégration terme à terme et on trouve
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
   Autre version On aurait pu directement faire une intégration terme à terme cas positif pour obtenir le résultat.

Planche 17
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$, $u : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable et donner son polynôme minimal.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Solution 17

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors
$$u(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k.$$
   $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
   u est bien linéaire.

2. On remarque que $u^2(P) = P$. Donc $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u, donc u est diagonalisable.
   Son polynôme minimal est $X-1$, $X+1$ ou $(X-1)(X+1)$.
   Si $\pi_u = X-1$, alors $u = Id$, ce qui n'est pas.
   Si $\pi_u = X+1$, alors $u = -Id$, ce qui n'est pas.
   Donc $\pi_u = (X-1)(X+1)$.

3. 1 est valeur propre. On montre que son sous-espace propre est le sous-espace vectoriel engendré par
   si $n = 2p$, $(X^{2p}+1, X^{2p-1}+X, \ldots, X^{p+1}+X^{p-1}, X^p)$
   si $n = 2p+1$, $(X^{2p+1}+1, X^{2p}+X, \ldots, X^{p+1}+X^p)$.
   -1 est valeur propre. On montre que son sous-espace propre est le sous-espace vectoriel engendré par
   si $n = 2p$, $(X^{2p}-1, X^{2p-1}-X, \ldots, X^{p+1}-X^{p-1})$
   si $n = 2p+1$, $(X^{2p+1}-1, X^{2p}-X, \ldots, X^{p+1}-X^p)$.
   En fait, on montre que les vecteurs de chacune de ces familles sont bien des vecteurs propres formant une famille libre et on conclut par dimension.

Planche 18
Soit

$$(E) \quad 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

On cherche toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles vérifiant (E).
On pose $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x-2y, x-3y)$.

1. Montrer que Φ est bijective et que Φ et Φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles vérifiant (E).
   On pose $g = f \circ \Phi^{-1}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de celles de g.

3. Résoudre le problème posé

Solution 18

1. Φ est linéaire et son déterminant est -1, donc Φ est bien bijectif.
   Φ est clairement de classe $\mathcal{C}^2$.
   $\Phi^{-1} : (u,v) \mapsto (3u-2v, u-v)$ est clairement aussi de classe $\mathcal{C}^2$.

2. g est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition. On a $f = g \circ \Phi$. La règle de la chaîne donne

$$\begin{array}{rcl}
f(x,y) &=& g(x-2y,x-3y)\\
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& \dfrac{\partial g}{\partial u}(x-2y,x-3y)+\dfrac{\partial g}{\partial v}(x-2y,x-3y)\\
\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& -2\dfrac{\partial g}{\partial u}(x-2y,x-3y)-3\dfrac{\partial g}{\partial v}(x-2y,x-3y)\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &=& \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x-2y,x-3y)+2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x-2y,x-3y)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x-2y,x-3y)\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &=& -2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x-2y,x-3y)-5\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x-2y,x-3y)-3\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x-2y,x-3y)\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &=& 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x-2y,x-3y)+12\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x-2y,x-3y)+9\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x-2y,x-3y)
\end{array}$$

3. On trouve alors pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+5\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)=0 \iff -\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x-2y,x-3y)=0.$$

f est donc solution de E si et seulement si g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$. On résout cette dernière équation :
g est solution de $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ si et seulement s'il existe h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=h(v)$
et donc si et seulement s'il existe H et J de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $g(u,v)=H(v)+K(u)$.
Finalement, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe H et J de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=H(x-3y)+K(x-2y)$.

Planche 19
Soient A et M deux matrices carrées de taille $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathrm{rg}(M)=1$. Montrer

$$\mathrm{Tr}(AM)=0 \iff MAM=0.$$

Solution 19
M étant de rang 1, on peut l'écrire $M=UV^T$ où U et V sont des matrices colonnes (à n lignes). On a

$$\mathrm{Tr}(AM)=\mathrm{Tr}(AUV^T)=\mathrm{Tr}(V^TAU)=V^TAU$$

On reconnaît alors,

$$MAM=U(V^TAU)V^T=(V^TAU)(UV^T)=\mathrm{Tr}(AM)M.$$

Comme M est de rang 1, M n'est pas nulle et donc

$$\mathrm{Tr}(AM)=0 \iff MAM=0.$$

Planche 20
Soient $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose $I_n=\int_0^1 t^n|\ln(1-t)|^\alpha dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour quelles valeurs de α, I_n converge -t-elle ?
2. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?
3. $\sum I_n$ converge-t-elle ?

Solution 20

1. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^n|\ln(1-t)|^\alpha$. f_n est continue sur $]0,1[$.
$$f_n(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{-n-\alpha}}$$
Donc, f_n est intégrable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $-n-\alpha<1$, i.e. $\alpha+n+1>0$.
Ensuite, on a
$$f_n(t) \underset{t\to1^-}{\sim} |\ln(1-t)|^\alpha$$
et par croissances comparées
$$f_n(t) \underset{t\to1^-}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right).$$
On en déduit alors que f_n est intégrable sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$.
En conclusion, puisque f_n est à valeurs positives, la convergence de I_n est équivalente à l'intégrabilité de f_n et donc I_n converge si et seulement si $\alpha+n+1>0$.

2. Pour $n \geq -\alpha-1$, I_n est bien définie, i.e. (I_n) est définie à partir d'un certain rang $n_0 = \lfloor -\alpha \rfloor$.
On applique le théorème de convergence dominée.
Chaque f_n est continue sur $]0,1[$.
(f_n) converge vers 0 sur $]0,1[$ et 0 est continue sur $]0,1[$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a, pour $t \in]0,1[$, $|f_n(t)| \leq f_{n_0}(t)$ et f_{n_0} est bien une fonction continue et intégrable sur $]0,1[$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que I_n converge vers 0.

3. On calcule
$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} I_k = \int_0^1 t^{n_0}\frac{1-t^{n-n_0+1}}{1-t}|\ln(1-t)|^\alpha dt.$$
Distinguons les cas.

• $\alpha < -1$. $\int_0^1 t^{n_0}\frac{1}{1-t}|\ln(1-t)|^\alpha dt$ converge (avec le changement de variable $u = -\ln(1-t)$ au voisinage de 1) et on montre avec le théorème de convergence dominée que (S_n) converge vers $\int_0^1 t^{n_0}\frac{1}{1-t}|\ln(1-t)|^\alpha dt$, en utilisant comme fonction de domination $t \mapsto \frac{t^{n_0}}{(1-t)|\ln(1-t)|^{-\alpha}}$.

• $\alpha = -1$. $\int_0^x t^{n_0}\frac{1}{(1-t)|\ln(1-t)|}dt \underset{x\to0^+}{\to} +\infty$ car $\int_0^1 t^{n_0}\frac{1}{(1-t)|\ln(1-t)|}dt$ diverge, (avec le changement de variable $u = -\ln(1-t)$).
Soit $M>0$. Il existe X tel que $\int_0^X t^{n_0}\frac{1}{(1-t)|\ln(1-t)|}dt \geq M+1$.
On peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $]0,X]$:
$\int_0^X t^{n_0}\frac{1-t^{n-n_0+1}}{1-t}|\ln(1-t)|^{-1}dt$ converge vers $\int_0^X t^{n_0}\frac{1}{(1-t)|\ln(1-t)|}dt$ et donc il existe un rang m à partir duquel $\int_0^X t^{n_0}\frac{1-t^{n-n_0+1}}{1-t}|\ln(1-t)|^{-1}dt \geq M$ et donc par transitivité, pour $n \geq m$, $\int_0^1 t^{n_0}\frac{1-t^{n-n_0+1}}{1-t}|\ln(1-t)|^{-1}dt \geq M$. On a montré que (S_n) diverge vers $+\infty$ et donc $\sum I_n$ diverge.

• Pour $\alpha > -1$, on minore, pour tout n, S_n par la n-ième somme partielle du cas précédent, et donc la série diverge.
On a donc montré que $\sum I_n$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Planche 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?
2. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer
$$\{0\} \subset \mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}.$$
   (b) Montrer que les sous-espaces propres de M sont de dimension 1.
   (c) Résoudre $M^2 = A$ (équation matricielle d'inconnue M).

Solution 21

1. $\chi_A = X(X-1)^2$. χ_A est donc scindé A est trigonalisable. Son spectre est $\{0, 1\}$.
On s'intéresse à $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 2. Par le théorème du rang, son noyau est de dimension 1 et donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est de dimension $1 < 2$: A n'est pas diagonalisable.

2. (a) Si M était inversible, alors A le serait, ce qui n'est pas puisque 0 est valeur propre de A. Donc M n'est pas inversible et 0 est valeur propre de M, i.e. $\{0\} \subset \mathrm{Sp}(M)$.
Soit λ une valeur propre de M. Il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = \lambda X$ et donc $M^2X = \lambda^2 X$, i.e. $AX = \lambda^2 X$. λ^2 est donc dans le spectre de A, i.e. $\lambda^2 = 0$ ou $\lambda^2 = 1$ d'où $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.
   (b) Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $E_\lambda(M) \subset E_{\lambda^2}(A)$. Les sous-espaces propres de A étant de dimension 1, ceux de M ne peuvent être que de dimension au plus 1. Mais un sous-espace propre étant de dimension au moins 1, ils sont de dimension 1.
   (c) $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_0(M)$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_{-1}(M)$ ou $= E_1(M)$.
0 ne peut pas être la seule valeur propre de M, sinon, M serait nilpotente et A aussi, ce qui n'est pas puisque A possède d'autres valeurs propres que 0. M ne peut pas avoir trois valeurs propres différentes, sinon elle serait diagonalisable et donc A aussi. On en déduit que si M vérifie $M^2 = A$ alors
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ -1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

avec a, b et c dans $\mathbb{R}$. Avec les valeurs propres mises en jeu, dans le premier cas, forcément $c = 1$ et dans le deuxième, forcément, $c = -1$. En injectant dans $M^2 = A$, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que ces deux matrices conviennent.

Planche 22

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $S = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de S et l'espérance de S.
2. Calculer l'espérance de T.
3. S et T sont-elles indépendantes ?

Solution 22

1. $S(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S \geq k) = \mathbb{P}((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2.$$

   $\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(S \geq k) - \mathbb{P}(S \geq k+1) = \frac{2n-2k+1}{n^2}$.

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{2n-2k+1}{n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

2. $S + T = X + Y$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(S) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

3. $\mathbb{P}((S = 2) \cap (T = 1)) = 0$ (le minimum ne peut pas être strictement plus grand que le maximum) alors que $P(S = 2) = \frac{2n-3}{n^2} \neq 0$ et $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$ par indépendance de X et de Y et donc $\mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{n^2} \neq 0$. S et T ne sont donc pas indépendantes.

Planche 23

(E) $y'' = (x^4 + 1)y$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.
2. On admet que $x \mapsto \frac{1}{f(x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $g : x \mapsto f(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Solution 23

1. C'est la conclusion du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2. f peut-elle s'annuler sur $\mathbb{R}_+^*$? (Elle ne s'annule pas en 0). Supposons que f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Si $f'(x_0) = 0$, alors, par l'unicité donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $f = 0$, ce qui n'est pas. Donc $f'(x_0) \neq 0$. Mais alors $f(x) \underset{x \to x_0, x \neq x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$. Mais dans ce cas, $\frac{1}{f^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de x_0 : contradiction.
   Donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{f^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Alors, comme elle est aussi intégrable, $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{-1}{f^2(x)}$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = f'(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt - \frac{1}{f(x)}$.
   On en déduit que g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, i.e. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et que pour $x \in \mathbb{R}_+$,
$$g''(x) = f''(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt - \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (1 + x^4) f(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt = (1 + x^4) g(x).$$
   g est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Planche 24

1. Rappeler la factorisation de $a^n - b^n$ avec a, b et n des entiers naturels, n non nul.

2. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est de la forme $n = 2^p$, avec $p \in \mathbb{N}$.

3. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $F_m = 2^{(2^m)} + 1$. Montrer que si $n \neq m$ alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
   Les F_n sont les nombres de Fermat. F_5 n'est pas premier...

Solution 24

1. $$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

2. Supposons que n possède un diviseur premier impair. Alors, $n = pq$, avec p premier impair. On peut alors écrire, avec la première question,
$$2^n + 1 = (2^q)^p - (-1)^p = (2^q + 1) \sum_{k=0}^{p-1} (2^q)^k (-1)^{p-1-k}.$$
   2^q+1 divise ainsi 2^n+1. Mais comme 2^n+1 est premier, ou bien $2^q+1 = 1$ ou bien $2^q+1 = 2^n+1$. Les deux aboutissent à une contradiction. Donc, n ne possède que des diviseurs premiers pairs, i.e. ne possède que 2 comme diviseur premier : n est une puissance de 2.

3. Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, avec $n < m$. On écrit $m = n + p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. On a
$$F_m = 2^{(2^{n+p})} + 1 = \left(2^{(2^n)}\right)^{2^p} + 1 = (F_n - 1)^{2^p} + 1 = F_n \sum_{k=1}^{2^p} \binom{2^p}{k} F_n^{k-1} (-1)^{2^p - k} + 2.$$
   Si d est un diviseur commun à F_n et F_m, alors, d divise 2. Donc, ou bien $d = 1$ ou bien $d = 2$. Si $d = 2$, comme d divise F_n, d divise $F_n - 2^{(2^n)}$ et donc 2 divise 1 : contradiction.
   Finalement, $d = 1$ et F_n et F_m sont premiers entre eux.

Planche 25
Soit A une matrice antisymétrique. On pose $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)A - M^T$.

1. Montrer que φ est un automorphisme.
2. Montrer que φ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et la dimension de ses sous-espaces propres.

Solution 25

1. φ est linéaire par linéarité de la trace et de la transposition. φ est donc un endomorphisme. Soit M dans le noyau de φ. Alors, $M^T = \mathrm{Tr}(M)A$ et donc $M = -\mathrm{Tr}(M)A$. M est donc antisymétrique : sa trace est nulle. Finalement, $M = 0$. φ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie : φ est un automorphisme.
2. On vérifie que $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$. $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est donc un polynôme annulateur de φ scindé à racines simples : φ est diagonalisable.
   On a aussi $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$.
   Premier cas : $A = 0$. Alors $E_1(\varphi) = A_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(\varphi) = S_n(\mathbb{R})$.
   Deuxième cas : $A \neq 0$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = M$. Alors $\mathrm{Tr}(M)A = M + M^T$ et si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$, alors $A = \frac{1}{\mathrm{Tr}(M)}(M + M^T)$ est symétrique, comme elle est aussi antisymétrique, $A = 0$: contradiction.
   Donc $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Alors, $M^T = -M$. On a montré que $E_1(\varphi) \subset A_n(\mathbb{R})$.
   Réciproquement, on vérifie que $A_n(\mathbb{R}) \subset E_1(\varphi)$. (La trace d'une matrice antisymétrique est nulle.)
   $E_1(\varphi)$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Comme φ est diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propres est n^2 et donc $E_{-1}(\varphi)$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Planche 26
Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$.

Solution 26

1. Posons $g : t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$. g est continue sur $]0,1[$. Posons $G : x \mapsto \int_{1/2}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. Par le théorème fondamental de l'analyse, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et donc $f : x \mapsto G(x^2) - G(x)$ est continue par composition (en fait de classe $\mathcal{C}^1$).
   $g(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} -1$ et $t \mapsto -1$ est intégrable sur $]\,0, \frac{1}{2}\,]$, par comparaison g est intégrable sur $]\,0, \frac{1}{2}\,]$ et donc G possède une limite en 0^+.
   $g(t) \underset{t \to 1^+}{\sim} \ln(1-t)$, $g(t) = \underset{t \to 1^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[\,\frac{1}{2}, 1\,[$, par comparaison g est intégrable sur $[\,\frac{1}{2}, 1\,[$, et donc G possède une limite en 1^-.
   Par composition et linéarité, f possède des limites en 0^+ et en 1^- (et ces limites sont nulles). f est donc prolongeable par continuité à $[0,1]$.

2. On a déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et que f est continue sur $[0,1[$ en posant $f(0) = 0$. On va montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ avec le corollaire du théorème des accroissements finis. Pour cela, on calcule, pour $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2\ln(1-x^2) - \ln(1-x)}{x}$$

Avec le développement limité usuel de $x \mapsto \ln(1-x)$, on obtient

$$f'(x) = 1 + \mathcal{O}(x) \quad [x \to 0^+].$$

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et $f'(0) = 1$.

Planche 27

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p(-\ln(x))^q \, dx$$

1. Montrer que

$$I_{p,q} = \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$$

2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x} \, dx$$

Solution 27

1. Une intégration par parties montre que (on primitive x^p et on dérive $\ln(x)^q$ en prenant garde que les termes écrits existent)

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I(p, q-1)$$

et une récurrence donne alors

$$I_{p,q} = \frac{q!}{(p+1)^q} I(p, 0) = \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$$

2. D'après le développement en série entière de exp, on a

$$\forall x \in]0,1], \; g(x) = x^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(-\ln(x))^k}{k!}$$

Posons $g_k \; : \; x \mapsto \frac{x^k(-\ln(x))^k}{k!}$. (g_k) est une suite de fonctions continues sur $]0,1]$ et $\sum(g_k)$ converge simplement sur $]0,1]$ vers g qui est aussi continue. De plus

$$\int_0^1 |g_k| = \frac{1}{k!}|I_{k,k}| = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$$

est le terme général d'une série convergente (négligeable devant $1/k^2$). On peut appliquer le théorème d'interversion somme-intégrale pour en déduire que

$$\int_0^1 x^{-x} \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

Planche 28
Pour $a, b \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Solution 28
Des développements montrent que $\forall n \geq 1,\ D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n$ ce qui nous amène à une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - (a+b)r + ab = (r-a)(r-b)$. On a $D_1 = a+b$ et $D_2 = a^2 + b^2 - ab$. Si on pose $D_0 = 1$, la récurrence est vérifiée à partir du rang 0.
Pour la résolution, il faut distinguer deux cas.

- Si $a \neq b$, il existe α, β tels que $\forall n,\ D_n = \alpha a^n + \beta b^n$. Les valeurs de D_0, D_1 donnent α et β :
$$D_n = \frac{a^{n+1}}{a-b} - \frac{b^{n+1}}{a-b}$$
- Si $a = b$, il existe α, β tels que $\forall n,\ D_n = (\alpha n + \beta)a^n$. Les valeurs de D_0, D_1 donnent α et β :
$$D_n = (n+1)a^n$$

Planche 29

1. Existence de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}\,dt$.
2. Calcul. Indication : passer par une somme infinie.

Solution 29

1. $t \mapsto \frac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0,1[$.
   En 0, la fonction équivaut à $-\ln(t) = o(1/\sqrt{t})$ et est donc intégrable.
   En 1, elle équivaut à $\ln(1-t) \times (t-1)$ et est donc de limite nulle. Elle est encore intégrable.
   La fonction est ainsi intégrable sur $]0,1[$ et son intégrale existe a fortiori.
2. En utilisant le développement en série entière de $\ln(1-t)$, on a
$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{\ln(1-t)\ln(t)}{t} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^{n-1} \ln(t)$$
   Posons $g_n\ :\ t \mapsto \frac{1}{n} t^{n-1}\ln(t)$.
   - (g_n) est une suite de fonctions continues sur $]0,1[$ dont la série converge simplement sur $]0,1[$.
   - La somme simple $t \mapsto \frac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0,1[$.
   - Avec une intégration par partie simple (en étant attentif à l'existence des quantités), on a
$$\int_0^1 |g_n| = \frac{1}{n}\left(\left[-\frac{t^n}{n}\ln(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n}\,dt\right) = \frac{1}{n^3}$$
     qui est le terme général d'une série convergente.

Par théorème d'interversion terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}\,dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{1}{n}t^{n-1}\ln(t)\,dt$$

Le calcul d'intégrale est le même que ci-dessus et on conclut que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}\,dt = \zeta(3)$$

Planche 30

On pose $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. J_n est-elle $\mathbb{C}$-diagonalisable ? Donner son spectre.
2. Calculer les puissances de J_n.

Solution 30

Première version

1. On calcule le polynôme caractéristique : on trouve $X^n - 1$. Il simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc J_n est diagonalisable et ses valeurs propres sont les racines n-ièmes de l'unité.
2. J_n est la matrice dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de l'endomorphisme f tel que
$$f(e_1) = e_n,\ f(e_2) = e_1,\ f(e_3) = e_2, \dots, f(e_n) = e_{n-1}$$
En itérant f, ce qui revient à calculer les puissances de J_n, les 1 vont "remonter" sur chaque colonne (circulairement, c'est à dire que l'on passe aussi de la ligne 1 à la ligne n).

Deuxième version : on répond aux deux questions en une fois.
On voit d'abord ce qui se passe pour les itérés de f et donc des puissances de J_n.
Avec cette remarque, $f^n = \mathrm{Id}$ et $X^n - 1$ annule J_n. J_n est donc diagonalisable (puisque $X^n - 1$ est scindé simple sur $\mathbb{C}$).
Comme il est clair que pour tout λ, $J_n - \lambda I_n$ est de rang au moins $n-1$ (les $n-1$ dernières colonnes sont indépendantes), une valeur propre a un sous-espace propre de dimension 1 et donc (diagonalisabilité) une multiplicité 1. On en déduit que tout polynôme annulateur est au moins de degré n. Ainsi

$$\chi_{J_n} = \mu_{J_n} = X^n - 1$$

et les valeurs propres sont exactement les racines n-ièmes de 1 : $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k = 0, \dots, n-1$.

Planche 31

Soit (a_n) une suite bornée de réels.

1. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ converge pour tout x. On note f sa somme.
2. Montrer que
$$\forall t > 1,\ \int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}}$$

Solution 31

1. Notons M un majorant de $|a_n|$. Pour tout x, $\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}M$ qui est le terme général d'une série (exponentielle) convergente. Ainsi, par comparaison des séries positives, $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ converge absolument.

2. On fixe $t > 1$. Posons $f_n(x) = \frac{a_n}{n!}x^n e^{-tx}$.

   - (f_n) est une suite de fonctions continues dont la série converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $x \mapsto f(x)e^{-tx}$ elle même continue.
   - On a $f_n(x) = o(1/x^2)$ au voisinage de $+\infty$ (car $t > 0$ et par croissances comparées) et f_n est donc intégrable au voisinage de $+\infty$ (seul point probématique). De plus

     $$\int_0^{\infty} |f_n(x)|\, dx \leq \frac{M}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-tx}\, dx = \frac{M}{n!t^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\, du$$

     avec le changement de variable linéaire $u = xt$. Notons I_n l'intégrale à droite. Une intégration par partie simple montre que $I_n = nI_{n-1}$. Comme $I_0 = 1$, $I_n = n!$. Ainsi

     $$\int_0^{\infty} |f_n(x)|\, dx \leq \frac{M}{t^{n+1}}$$

     et le majorant est le terme général d'une série convergente.

   On peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Le calcul de l'intégrale de f_n se fait comme ci-dessus et on obtient la relation demandée.

Planche 32

Soit E un e.v.n. de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose avoir $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$. Montrer que u est inversible.
2. Soit $v\ :\ \begin{cases} \mathrm{Im}(u) \to \mathrm{Im}(u) \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$. En utilisant v, montrer l'existence de $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$ et $\deg(P) \leq \mathrm{rg}(u) + 1$.

Solution 32

1. Posons $a = P(0) \neq 0$ et notons $Q = P - a$. $P(u) = 0$ donne $Q(u) + a\mathrm{Id} = 0$. Comme $Q(0) = 0$, on a un polynôme R tel que $Q = XR$ et ainsi

   $$uR(u) = -a\mathrm{Id}$$

   u est ainsi inversible et son inverse est $-\frac{1}{a}R(u)$.

2. v est tout d'abord un endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ (qui est bien stable par u). Posons $P = X\chi_v$. On a alors $P(u) = u \circ \chi_V(u) = \chi_v(u) \circ u$ et donc

   $$\forall x \in E,\ P(u)(x) = \chi_v(u) \circ u(x) = \chi_v(u)(u(x))$$

   Sur $\mathrm{Im}(u)$, $\chi_v(v)$ et $\chi_v(u)$ ont la même action (puisque v est une restriction de u) et c'est l'application nulle (Cayley-Hamilton). Ainsi $P(u) = 0$ et P est exactement de degré $\mathrm{rg}(u) + 1$.

Planche 33

On note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver l'existence de
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)2^{n+1}}$$

2. Calculer S à l'aide d'une série entière.

Solution 33

1. On a $0 \leq H_n \leq n$ et donc $0 \leq \frac{H_n}{(n+1)} 2^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ qui est le terme général d'y-une série convergente. Par théorème de comparaison des séries positives, S existe.

2. Posons $u_0 = 1$ et $u_n = \frac{1}{n}$ si $n \geq 1$. Posons ensuite $v_n = 1$ pour tout n. On a alors
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = (u * v)_n$$
Par théorème sur le produit de Cauchy de séries entières (et puisque les séries entières mises en jeu ont un rayon de convergence égal à 1)
$$\forall |x| < 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$
Une série entière convergne normalement sur tout compact de l'intervalle ouvert de convergence. C'est donc ici le cas sur le segment $[0, 1/2]$ et après avoir intégré, on est dans le cas simple où l'interversion des symboles est licite. On obtient
$$S = \int_0^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n\ dx = \int_0^{1/2} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}\ dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2\right]_0^{1/2} = \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

Planche 34
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{2018} = A^{2016}$.

1. On suppose que A est symétrique. Montrer que
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \mathrm{rg}(A)$$

2. Cé résultat reste-t-il vrai avec la seule hypothèse de diagonalisabilité de A ?

Solution 34
$X^{2016}(X^2 - 1)$ est un polynôme annulateur de A. Le spectre de A est donc inclus dans $\{0, 1, -1\}$ (ensemble des racines du polynôme).

1. A est, par théorème spectral, diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale P : $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) = D$. A étant symétrique,
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = \|A\|_2 = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(PD^2P^{-1}) = \mathrm{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$
Comme $d_i \in \{0, 1, -1\}$, la somme précédente est égale au rang de D, c'est à dire celui de A.

2. Soit $A = I_n - E_{n,n} + E_{1,n}$. On a $A^2 = A$ et ainsi A est diagonalisable (possède un annulateur scindé) et $A^{2018} = A^{2016} (= A)$. Le rang de A vaut $n - 1$ et la somme des $a_{i,j}^2$ vaut n. Le résultat est donc faux avec la seule hypothèse de diagonalisabilité de A.

Planche 35
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que $\det(A) = 1$.

Solution 35
$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ annule A et A est donc $\mathbb{C}$-diagonalisable et ses valeurs propres complexes ne peuvent être que i et $-i$. Comme A est réelle, elle ont même multiplicité p et $2p = n$ (dans $\mathbb{C}$, la somme des multiplicité des valeurs propres vaut toujours la taille de la matrice). Ainsi

$$\det(A) = (i)^p(-i)^p = 1$$

Planche 36

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Pour $x \geq 0$ et $n \geq 0$, on pose $u_n(x) = \arctan(\sqrt{n+x}) - \arctan(\sqrt{n})$.
   (a) Etudier la convergence simple et normale de $\sum(u_n)_{n\geq 0}$.
   (b) La somme S de la série est-elle continue ? De classe C^1 ?

Solution 36

1. $f\ :\ x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ à dérivée nulle. La fonction est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$. Comme elle vaut $\pi/2$ en 1, on a le résultat annoncé.
2. (a) Par inégalité des accroissement finis,

$$|u_n(x)| \leq |\sqrt{n+x} - \sqrt{n}| \sup_{t\in[\sqrt{n},\sqrt{n+x}]} \frac{1}{1+t^2} = \frac{x}{\sqrt{n+x}+\sqrt{n}} \frac{1}{1+n} \leq \frac{x}{n\sqrt{n}}$$

Pour tout $x \geq 0$, le majorant est le terme général d'une série convergente et ainsi $\sum(u_n(x))$ converge absolument. On a donc convergence simple sur $\mathbb{R}^+$.
On a même $\|u_n\|_{\infty,[0,a]} \leq \frac{a}{n\sqrt{n}}$ et ceci montre la convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.
On a aussi, pour $n \geq 1$, $u_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{n+x}(1+n+x)}$ et u_n est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{n}) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Il n'y a donc pas convergence normale sur $\mathbb{R}^+$.

(b) La continuité des u_n ainsi que la convergence uniforme sur tout segment de la série donnent $S \in C^0(\mathbb{R}^+)$.
Pour la dérivabilité, il y a déjà u_0 qui peut poser poroblème puisque cette fonction n'est pas dérivable en 0. On écrit que

$$S(x) = \arctan(\sqrt{x}) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

Avec l'expression de u_n' ci dessus, on a $\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = |u_n'(0)| = \frac{1}{2\sqrt{n}(1+n)}$ (pour $n \geq 1$) et ainsi $\sum(u_n')_{n\geq 1}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. La somme infinie ci-dessus (à droite) est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Comme $x \mapsto \arctan(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais pas en 0 (le taux d'accroissement en 0 est de limite infinie), $S \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$ mais S n'est pas dérivable en 0.

Planche 37
Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}}$$

Solution 37
$k^{1/k} = \exp(\ln(k)/k) \sim 1$. Par théorème de sommation des relations de comparaison pour des séries positives divergentes, on a donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k} \sim n$$

On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série positive divergente.

Planche 38
Soient $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer la valeur minimale de

$$\Delta_{a,b} = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

Solution 38
Deux approches sont possibles pour cet exercice. La première repose sur de l'algèbre bilinéaire et la seconde sur du calcul différentiel.

- **Première approche.**
  Notons $e = (1, \ldots, 1)$. On a alors

  $$\Delta_{a,b} = \|y - (ax + be)\|^2$$

  où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. En notant $F = \mathrm{Vect}(x, e)$, on en déduit que

  $$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \Delta_{a,b} = \inf_{z\in F} \|y - z\|^2 = (d(y, F))^2 = \|y - p(y)\|^2$$

  où p est la projection orthogonale sur F (et la borne inférieure est un minimum).
  Si (x, e) est liée alors (e) est une base orthogonale de F et $p(y) = \frac{(y|e)}{\|e\|^2} e = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) e$. Le minimum est atteint pour $a = 0$ et $b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)$ (c'est à dire la moyenne des y_i).
  Sinon, on pose $f = x - \frac{(x|e)}{\|e\|^2} e$ et on obtient une base orthogonale (e, f) de F. On a alors $p(y) = \frac{(y|e)}{\|e\|} e + \frac{(y|f)}{\|f\|} f$ et on poursuit le calcul.

- **Seconde approche.**
  On considère la fonction $g : (a, b) \mapsto \Delta_{a,b}$. g est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Si elle présente un extremum, c'est forcément en un point critique. On a

  $$\frac{\partial g}{\partial a}(a, b) = -2\sum_{i=1}^n x_i(y_i - ax_i - b),\ \frac{\partial g}{\partial b}(a, b) = -2\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)$$

  Si (a, b) est point critique alors $\begin{cases} b + am_x = m_y \\ bm_x + am_{x^2} = m_{xy} \end{cases}$ où mx, my, m_{xy}, m_{x^2} sont les moyennes de x_i, y_i, x_iy_i et x_i^2.
  On obtient un système linéaire de déterminant $m_{x^2} - (m_x)^2$.
  Si le déterminant est non nul, il y a une unique solution. Il reste à justifier que le minimum de

$\Delta_{a,b}$ existe bien ce qui implique que g admet un minimum et celui-ci est forcément atteint en l'unique point critique. La première approche donne l'existence du minimum.
Sinon, c'est plus compliqué à gérer car il peut y avoir (a priori) une droite de points critiques ou aucun poit critique. $m_{x^2} = (m_x)^2$ s'écrit

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j} x_i x_j$$

On remarque que $2x_ix_j \leq x_i^2 + x_j^2$ avec égalité seulement si $x_i = x_j$. On obtient avec cette majoration que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \frac{1}{2n^2}\sum_{i,j}(x_i^2 + x_j^2) = \frac{1}{2n^2}\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Comme il y a égalité, on a donc l'égalité de tous les x_i et c'est un cas facile à traiter.

Planche 39
On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge.

1. Montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que si $x, y \in \ell^2$, $\sum(x_ny_n)$ converge.
   (b) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur ℓ^2 en posant

$$(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $\varphi : x \in \ell^2 \mapsto x_p \in \mathbb{R}$. Montrer que φ est une forme linéaire continue.
4. Déterminer l'orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ (assimilé à l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang).

Solution 39

1. Soient $u, v \in \ell^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(u_n + \lambda v_n)^2 = u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \lambda^2 v_n^2$ et pour montrer que $u + \lambda v \in \ell^2$, il suffit de montrer que $\sum(u_nv_n)$ converge absolument. C'est le cas car par inégalité de Schwarz dans $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} u_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k^2\right)^{1/2}$$

   Ainsi ℓ^2, qui est non vide, est stable par combinaisons linéaires et c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. (a) On l'a montré ci-dessus. On aurait aussi pu utiliser $2|u_nv_n| \leq u_n^2 + v_n^2$.
   (b) Ainsi, $(.|.)$ est bien défini sur ℓ^2. La symétrie, la bilinéarité, la positivité sont immédiates. Si $(u|u) = 0$ alors on a une somme de terme positifs qui est nulle. Tous les termes sont nuls et $u = 0$ ce qui donne le caractère défini positif.

3. φ est immédiatement une forme linéaire et

$$\forall x \in \ \ell^2,\ |\varphi(x)| \leq \|x\|_2$$

   φ est donc continue et même 1-lipschitzienne.

4. Soit $u \in \ell^2$ orthogonale à toutes les suites nulle à partir d'un certain rang. En posant δ_p égale à la suite nulle partout sauf le terme d'indice 1 qui vaut 1, on trouve $0 = (u|\delta_p) = u_p$ et u est nul. L'orthogonal du sous-espace considéré est $\{0\}$.

Planche 40
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i,\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Solution 40
Supposons par l'absurde que l'on puisse trouver X non nul dans le noyaui de A et notons i un indice tel que $|x_i|$ soit maximal (et donc non nul). $(AX)_i = 0$ donne

$$|a_{i,i}x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

et mène à une contradiction en divisant par $|x_i| > 0$.

Planche 41
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non nulle. On définit u par : $u(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que u est un endomorphisme. Trouver son noyau et son rang. u est-il diagonalisable ?

Solution 41
La trace étant linéaire, on obtient aisément que

$$u(M + \lambda N) = u(M) + \lambda u(N)$$

Comme u va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même, c'est un endomorphisme de cet espace.
Si $u(M) = 0$ alors $M = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)} A$ est multiple de A. Ainsi $\ker(u) \subset \mathrm{Vect}(A)$. Réciproquement, $u(A) = 0$. Ainsi

$$\ker(u) = \mathrm{Vect}(A) \ \text{ et } \ \mathrm{rg}(u) = n^2 - 1$$

par théorème du rang pour le second résultat.
Supposons (analyse) que λ est valeur propre de u et que M soit un vecteur propre associé. On a $u(M) = \lambda M$ et donc

$$(\mathrm{Tr}(A) - \lambda)M = \mathrm{Tr}(M)A$$

Si $\lambda = \mathrm{Tr}(A)$ alors $\mathrm{Tr}(M) = 0$ (car $A \neq 0$). Sinon, $M \in \mathrm{Vect}(A)$ et comme $u(A) = 0$, on a $\lambda = 0$..
Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, on a deux valeurs propres distinctes possibles $\mathrm{Tr}(A)$ et 0 et

$$E_{\mathrm{Tr}(A)}(u) \subset \{M / \ \mathrm{Tr}(M) = 0\} \ \text{ et } \ E_0 \subset \mathrm{Vect}(A)$$

On vérifie sans peine les inclusions réciproques. La somme des dimensions de ces espaces vaut $(n^2 - 1) + 1 = n^2$ (la trace est linéaire et son noyau est un hyperplan). u est diagonalisable

Planche 42
Nature et caractéristiques de l'endomorphisme associé à la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution 42
Les deux premières colonnes de A sont bien normées et orthogonales. Le produit vectoriel des deux premières colonnes donne la troisième : A est une matrice orthogonale directe. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. f est une rotation. On cherche ses invariants : on trouve la droite vectorielle engendrée par $(0,1,1)$. On pose donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1))$. L'axe de f est $(a, \text{Vect}(a))$. On choisit $x = (1,0,0)$ orthogonal à a. $f(x) = \frac{1}{3}(1,-2,2)$. Si on note θ une mesure de l'angle de f, on a $\cos(\theta)\|x\|^2 = (x|f(x))$ et donc $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$. De même le produit mixte $[x, f(x), a]$ a le même signe que $\sin(\theta)$ et donc ici négatif. f est donc la rotation d'axe $(a, \text{Vect}(a))$ et de mesure d'angle -Arccos$\left(\frac{1}{3}\right)$.

Planche 43
Etudier la convergence de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\sqrt{x}}\,dx$.

Solution 43
Si $x \in]0,1]$ alors $x + \sin(x) > 0$ (somme de deux positifs) et si $x > 1$ alors $\sin(x) + x \geq x - 1 > 0$.
Ainsi $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\sqrt{x}}$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
En 0, elle équivaut à $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \to 0$ et est prolongeable par continuité et donc intégrable.
Au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\sqrt{x}} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)^{-1} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2(x)}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

On montre classiquement à l'aide d'une intégration par parties que $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ existe.
On écrit que $\frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$ qui s'écrit comme somme d'une fonction dont l'intégrale n'existe pas sur $[\pi, +\infty[$ et d'une autre dont l'intégrale existe (toujours par IPP).
Enfin, une fonction $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
On peut en conclure que l'intégrale proposée n'existe pas.

Planche 44
On veut montrer qu'il n'existe pas de $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}$.

1. Traiter le cas $n = 1$.
2. Traiter le cas général en considérant : $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

Solution 44

1. Si $\deg(P) = 1$ alors P réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable mais $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ne l'est pas, il n'existe pas d'injection de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ ce qui serait le cas si $P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
2. Supposons que P convienne et posons $Q(X) = P(X+1) - P(x)$. $(\mathbb{Q}, +)$ étant un groupe, Q vérifie la même propriété que P. De plus $\deg(Q) < \deg(P)$. On voit donc que l'on peut conclure par récurrence sur le degré de P.

Planche 45
On considère la suite de terme général $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,dt$.

1. Etudier la convergence de (u_n).
2. Montrer l'existence d'un $c > 0$ tel que $u_n \sim \frac{c}{n}$.
3. Quel est le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$?

4. Etudier la convergence en R et $-R$.

Solution 45

1. Posons $f_n \ : \ t \mapsto e^{-t^n}$ et utilisons le théorème de convergence dominée.
   - (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $]1,+\infty[$ vers la fonction nulle elle même continue.
   - $\forall n \geq 1, \ \forall t > 1, \ |f_n(t)| \leq e^{-t}$ et le majorant est intégrable sur $[1,+\infty[$.

   On peut en conclure que
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
2. $t \mapsto t^n$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ à dérivée ne s'annulant pas. On peut donc effectuer le changement de variable $x = t^n$ qui donne
   $$u_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n}\, du$$
   On pose cette fois $g_n \ : \ u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}u^{1/n}$.
   - (g_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $]1,+\infty[$ vers la fonction $u \mapsto e^{-u}/u$ elle même continue.
   - $\forall n \geq 1, \ \forall u > 1, \ |g_n(u)| \leq e^{-u}$ et le majorant est intégrable sur $[1,+\infty[$.

   On en déduit que $\int_1^\infty g_n \to \int_0^\infty e^{-u}/u\, du = c > 0$ et donc
   $$u_n \sim \frac{c}{n} \quad \text{avec} \quad c = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$
3. Ainsi, $u_n x^n \sim c(x^n/n)$ est borné si $|x| < 1$ et non borné si $|x| > 1$ ce qui indique que $R = 1$.
4. Avec l'équivalent trouvé, $\sum(u_n)$ diverge (divergence si $x = R$).
   Posons $v_n = (-1)^n u_n$. On a une suite alternée telle que $|v_n| \to 0$. De plus, $(|v_n|)$ décroît (dans l'expression de u_n, pour chaque t l'expression sous l'intégrale est décroissante vis à vis de n). La règle spéciale indique que $\sum(v_n)$ converge (convergence si $x = -R$).

Planche 46

Soient X, Y deux variables indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $U = \frac{X}{Y}$

1. Calculer $\mathbb{E}(U)$.
2. Donner la loi de U.
3. Commenter la position de $\mathbb{E}(U)$ par rapport à 1.

Solution 46

1. Comme X et Y sont indépendantes, X et $1/Y$ le sont et
   $$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)$$
   On sait que $\mathbb{E}(X) = 1/p$ et on a
   $$\mathbb{E}(1/Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = -\frac{p}{1-p}\ln(1-(1-p))$$
   Finalement
   $$\mathbb{E}(U) = -\frac{\ln(p)}{1-p}$$

2. X et Y étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, U est à valeurs dans $\mathbb{Q}^{+*}$. Les écritures de $\frac{a}{b}$ (avec $a \wedge b = 1$) comme quotient de deux entiers naturels sont $\frac{ka}{kb}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$(U = a/b) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (X = ka) \cap (Y = kb)$$

La réunion étant disjointe, on en conclut que

$$\mathbb{P}(U = a/b) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = ka \cap Y = kb)$$

Par indépendance des variables

$$\mathbb{P}(U = a/b) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = ka)\mathbb{P}(Y = kb)$$

On utilise alors la définition d'une loi géométrique

$$\mathbb{P}(U = a/b) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{ka-1}(1-p)^{kb-1}p^2 = \frac{p^2}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{\infty}((1-p)^{a+b})^k$$

On reconnaît une somme géométrique et on conclut que

$$\mathbb{P}(U = a/b) = \frac{p^2}{(1-p)^2}\frac{(1-p)^{a+b}}{1-(1-p)^{a+b}}$$

3. Par concavité de la fonction ln, $\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$ et donc

$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$$

C'est la stricte concavité qui donne l'inégalité stricte pour $x \neq 0$ (la courbe est strictement en dessous de sa tangente, sauf au point lui même). Le plus simple pour justifier toute cela est sans doute de faire l'étude de $x \mapsto x - 1 - \ln(x)$ (sa dérivée est $x \mapsto \frac{x-1}{x}$ qui est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$).
On en déduit que $-\ln(p) > 1 - p$ et en divisant par $1 - p > 0$, on obtient

$$\mathbb{E}(U) > 1$$

Cela me semble raisonnable puisque quand X est loin de 1 alors pour de nombreux Y, U l'est aussi alors que quand Y est grand, U reste dans $]0, 1]$ pour de nombreux X et donc "proche de 1". En moyenne, on est plus souvent au delà de 1.

Planche 47
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. On considère une fonction X vérifiant

$$X'(t) = AX(t)$$

1. Montrer que si V est un vecteur propre de A associé à λ et si $X(0) = V$ alors $\forall t,\ X(t) = e^{\lambda t}V$.

2. De façon générale, donner l'expression de $X(t)$ en fonction de $X(0)$.

Solution 47
X est solution d'un système différentiel linéaire à coefficients continus et homogène. On est dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz et l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n. Une solution est caractérisée par sa valeur en 0 (par exemple).

1. On a une unique solution et il suffit de vérifier que X convient. C'est immédiat car $X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}(AV) = AX(t)$ et $X(0) = V$.

2. On décompose $X(0)$ sur une base $(e_1, \dots, e_n)$ de diagonalisation : $X(0) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. En notant λ_i la valeur propre pour e_i, on vérifie que

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{\lambda_i t} V_i$$

   par un calcul direct ou avec la question 1 et le principe de superposition.

Planche 48
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -7x(t) + 5y(t) - z(t) \\ z'(t) = -6x(t) + 6y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

Solution 48
Le système s'écrit matriciellement $U'(t) = AU(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
$(1, 1, 0)$ est propre pour A associé à -2. Lors du calcul de χ_A, l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ va faire apparaître un facteur $(X + 2)$ et l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ permet de terminer le calcul et d'obtenir

$$\chi_A = (X + 2)(X - 2)(X - 4)$$

Une résolution de système montre que $(1, 1, -4)$ est propre associé à 2 et que $(1, -2, -9)$ est propre associé à 4. Les trois fonctions

$$\varphi_1 \ : \ t \mapsto e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_2 \ : \ t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \varphi_3 \ : \ t \mapsto e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

sont trois solutions indépendantes du système. Comme le théorème de Cauchy-Lipschitz indique que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 3, c'est l'espace engendré par ces trois fonctions.

Planche 49
Nature de la série $\sum \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$.

Solution 49
On montre d'abord que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est entier. On développe par formule du binôme et on regroupe les termes :

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k)$$

Tous les termes pour les k impairs sont nuls. Il reste ceux pour les k pairs qui sont tous entiers. Notons k_n l'entier précédent. On a

$$u_n = \sin\Big((k_n - (2 - \sqrt{3})^n)\pi\Big) = (-1)^{k_n+1} \sin\Big((2 - \sqrt{3})^n \pi\Big)$$

Comme $|2 - \sqrt{3}| < 1$, on a ainsi

$$u_n \sim (-1)^{k_n+1} (2 - \sqrt{3})^n \pi$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Planche 50
Soit des entiers naturels $a_1, a_2, \dots, a_n$, 2 à 2 distincts. On note $P = -1 + \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$. On suppose qu'on peut décomposer P en produit AB de polynômes à coefficients entiers , démontrer qu'un des deux polynômes et de degré n.

Solution 50
Supposons avoir $P = AB$ avec $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. En particulier, $\forall i,\ A(a_i)B(a_i) = -1$ et donc $A(a_i) = -B(a_i) = 1$ ou $A(a_i) = -B(a_i) = -1$.
Donc $(A+B)(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. $A + B$ a au moins n racines distinctes (les a_i) et est donc soit nul soit de degré $\geq n$. Si A et B sont de degrés inférieurs à $n-1$, $A + B$ l'est aussi et donc $A + B = 0$, i.e. $A = -B$ et alors $P = -A^2$. Il s'en suit que P est à valeurs négatives, or avec sa définition, on a clairement P qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$: contradiction. Donc un des deux polynômes est de degré n (et l'autre est constant).

Planche 51
Soit A et B deux matrices à coefficients réels carrées d'ordre 3. On suppose que $\det(A) = \det(B) = \det(A + B) = \det(A - B) = 0$. Montrer que pour tout réel x, $\det(A + xB) = 0$.

Solution 51
Un développement brutal montre que $f\ :\ x \mapsto \det(A + xB)$ est polynomiale de degré ≤ 3. On suppose ici que $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$. Il existe donc une constante c telle que

$$\forall x,\ \det(A + xB) = cx(x-1)(x+1)$$

Il nous reste à exploiter $\det(B) = 0$. Pour cela, on écrit que les colonnes de B sont liées. Par exemple, la première est combinaison linéaire des deux autres. En faisant la même opération sur $\det(A + xB)$, il ne reste de x que sur les colonnes 2 et 3. La fonction f est ainsi en fait de degré ≤ 2 ce qui impose $c = 0$ et donne le résultat escompté.

Planche 52
On considère deux entiers naturels non nuls n et p.

1. On suppose que n divise p, montrer que $X^n - 1$ divise $X^p - 1$.
2. On note d le pgcd de n et p, calculer le pgcd et $X^n - 1$ et $X^p - 1$.

Solution 52

1. On écrit que $p = kn$. On a alors $(a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$ dans un anneau commutatif)
$$X^p - 1 = (X^n)^k - 1 = (X^n - 1)\sum_{i=0}^{k-1} X^{ni}$$
2. Effectuons la division euclidienne de p par n : $p = kn + r$. On a alors
$$X^p - 1 = (X^{kn} - 1)X^r + X^r - 1 = (X^n - 1)\sum_{i=0}^{k-1} X^{ni} + X^r - 1$$
Ainsi, $X^r - 1$ est le reste dans la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X^n - 1$.
Quand on calcule le pgcd de p et n d'une part et de $X^p - 1$ et $X^n - 1$ d'autre part, les calculs se sont de manière similaire et on trouve
$$(X^p - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{p \wedge n} - 1$$
On pour formaliser par récurrence sur n.

Planche 53
Pour a un réel quelconque, étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a \ln(t + e^{at})\, dt$.

Solution 53
$f_a\ :\ t \mapsto t^a \ln(t + e^{at})$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a des problèmes aux voisinages de 0 et de $+\infty$.
Au voisinage de 0, $\ln(t+e^{at}) = \ln(1+(a+1)t+O(t^2)) = (a+1)t+O(t^2)$ et donc $f_a(t) = (a+1)t^{a+1} + O(t^{a+2})$.

- Si $a \neq -1$, $f_a(t) \sim (a+1)t^{a+1}$ et il y a intégrabilité seulement si $a > -2$.

- Si $a = -1$, f_a est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0.

Au voisinage de $+\infty$, on doit aussi distinguer les cas.

- Si $a > 0$ alors $\ln(t + e^{at}) = at + \ln(1 + te^{-at}) \sim at$ et $f_a(t) \sim at^{a+1}$ qui est non intégrable $(a + 1 > 1)$.

- Si $a = 0$ alors $f_a(t) = \ln(2)$ n'est pas intégrable.

- Si $a < 0$, $\ln(t + e^{at}) = \ln(t) + \ln(1 + e^{at}/t) \sim \ln(t)$ et $f_a(t) \sim t^a \ln(t) = \frac{\ln(t)}{t^{-a}}$.
  Si $-a \leq 1$ i.e. $a \geq -1$ alors $tf_a(t) \to +\infty$ et par comparaison à $1/t$, on n'a pas intégrabilité.
  Si $a < -1$ alors $f_a(t) = o(t^{(a-1)/2})$ et comme $(1 - a)/2 > 1$, on a intégrabilité.

Finalement, f_a est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $a \in]-2, -1[$.

Planche 54
Soit A une matrice carrée à coefficients complexes. Démontrer l'équivalence entre les 2 assertions suivantes.
i. La suite (A^n) converge vers la matrice nulle.
ii. La suite (A^n) converge et la suite numérique $(\mathrm{Tr}(A^n))$ converge vers 0.

Solution 54
Supposons que $A^n \to 0$. En particulier la suite (A^n) converge (!) et comme la trace est linéaire (et donc continue puisque l'on est en dimension finie), $\mathrm{Tr}(A^n) \to \mathrm{Tr}(0) = 0$.

On suppose, réciproquement, que A^n est convergente de limite L et que $\mathrm{Tr}(A^n) \to 0$, c'est à dire que $\mathrm{Tr}(L) = 0$. A est $\mathbb{C}$-trigonalisable et il existe P inversible telle que $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure. On a alors $A^n = PT^nP^{-1}$ et $T^n = P^{-1}A^nP$. Comme $X \mapsto PXP^{-1}$ et $X \mapsto P^{-1}XP$ sont continues, la convergence de (A^n) et celle de (T^n) sont équivalentes. En particulier, les suites $(t_{i,i}^n)$ convergent et ceci nous apprend que $t_{i,i} = 1$ ou $|t_{i,i}| < 1$. Et comme $\mathrm{Tr}(T^n) = \mathrm{Tr}(A^n) \to 0$, il faut en fait que $\forall i,\ |t_{i,i}| < 1$ (sinon, la trace est de limite plus grande que 1). A ce niveau, on a montré que les valeurs propres de A sont toutes de module < 1.
Le cours nous apprend qu'il existe une base dans laquelle l'endomorphisme u canoniquement associé à u est représenté par

$$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_r) \ \text{ avec } \ A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & ? & \ldots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont les valeurs propres distinctes de A. On a alors l'existence dd'une matrice de passage Q telle que $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_I I_{n_i} + N_i)$ que l'on écrit $Q^{-1}AQ = D + N$. D et N commutent et N est nilpotent ($N^k = 0$ où k est la taille de la matrice A). Ainsi

$$Q^{-1}A^nQ = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} D^{n-i} N^i$$

Remarquons que $0 \leq \binom{n}{i} \leq n^i$. Choisissons de travailler avec une norme multiplicative. On a alors

$$\|Q^{-1}A^nQ\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|n^iD^{n-i}\|.\|N^i\|$$

Comme les coefficients diagonaux de D ont tous un module < 1, on a $k^iD^{n-i} \to 0$ par croissances comparée. On en déduit (la somme ci-dessus a un nombre constant de termes) que $Q^{-1}A^nQ \to 0$ et donc aussi $A^n \to 0$.

Planche 55
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $A^3 = A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Solution 55
$X^3 - X^2 + X = X(X^2 - X + 1) = X(X + j)(X + j^2)$ annule A. Le spectre complexe de A est donc inclus dans $\{0, -j, -j^2\}$. Notons m_0, m_j les multiplicités de 0 et $-j$. Comme A est réelle, $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ et $-j^2$ a aussi m_j pour multiplicité. Enfin, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, $m_0 + 2m_j = n$ et donc $n - m_0$ est pair. Or, A est $\mathbb{C}$ diagonalisable (le polynôme annulateur trouvé est scindé simple) et donc $\ker(A)$ est de dimension m_0. Par théorème du rang $\mathrm{rg}(A) = n - m_0$ est pair. *Ici, on utilise le fait que le rang de A considérée comme matrice réelle ou complexe est le même.*

Planche 56
On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à termes positifs et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ avec v_n défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$

1. Dans cette question uniquement, $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ quand $n \to +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.
2. On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_nv_n}$ diverge.
3. Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Solution 56

1. On a ici $v_n = \frac{1}{1+n^{2-\alpha}}$.
   Si $\alpha < 2$ alors $v_n \sim \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ et la condition de convergence est $\alpha < 1$.
   Sinon, v_n n'est pas de limite nulle et donc $\sum(v_n)$ diverge.
   Finalement $\sum(v_n)$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. On suppose que $\sum(u_n)$ et $\sum(v_n)$ convergent. En particulier $v_n \to 0$ et donc $n^2u_n \to +\infty$ et $v_n \sim \frac{1}{n^2u_n}$.
   On en déduit que $u_nv_n \sim \frac{1}{n^2}$ et donc $\sqrt{u_nv_n} \sim 1/n$ est le terme général d'une série positive divergente.
3. On suppose $\sum(u_n)$ convergente et, par l'absurde, $\sum(v_n)$ convergente. Alors

$$0 \leq \sqrt{u_nv_n} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2}$$

   montre que $\sum(\sqrt{u_nv_n})$ converge ce qui contredit la question précédente. La convergence de $\sum(u_n)$ entraîne donc la divergence de $\sum(v_n)$.

Planche 57
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$

1. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}

2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = I_X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Solution 57

1. On effectue une intégration par parties en primitivant $v'(t) = t^n$ en $v(t) = t^{n+1}/(n+1)$ et en dérivant $u(t) = e^{-t^2}$ en $u'(t) = -2te^{-t^2}$. Ceci est licite car u et v sont de classe C^1 et uv admet une limite finie (ici nulle) aux infinis. Elle donne
$$I_n = \frac{2}{n+1} I_{n+2}$$
2. On remarque que Y est une variable positive. Elle admet un moment d'ordre 1 éventuellement infini. Le théorème de transfert donne (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} I_n$$
Posons $f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-t^2}$ et appliquons le théorème de convergence dominée avec $\sum(f_n)$ sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout n, f_n est une fonction continue.
   - $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto e^{\lambda t - t^2}$ qui est elle même continue.
   - Pour tout entier n et tout réel x,
   $$\left| \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda t|^k}{k!} e^{-t^2} \leq e^{\lambda |t| - t^2}$$
   Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$ (continu et dominé par $1/t^2$ aux voisinages des infinis).

   On en déduit que
$$\mathbb{E}(Y) = e^{-\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t - t^2}\, dt$$
$\lambda t - t^2 = -(t - \lambda/2)^2 - \lambda^2/4$ et ainsi
$$\mathbb{E}(Y) = e^{-\lambda - \lambda^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\lambda/2)^2}\, dt = e^{-\lambda-\lambda^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi} e^{-\lambda - \lambda^2/4}$$

Planche 58

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue bornée. Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2 x^2}\, \mathrm{d}x$.

Solution 58

Le changement de variable linéaire $u = nx$ donne
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\, du$$
$g_n \ : \ u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ est pour tout n une fonction continue. Comme f est continue en 0, (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}$. Enfin, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geq 0,\ |g_n(u)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2}$$
et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut ainsi utiliser le théorème de convergence dominée et affirmer que
$$\lim_{n \to +\infty} I_n = f(0) \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi f(0)}{2}$$

Planche 59
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ n \geqslant 2$, telle que $\operatorname{rg} A = 2,\ \operatorname{Tr} A = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Solution 59
A étant de rang 2, son noyau est de dimension $n-2$ et 0 est donc valeur propre de multiplicité $\geq n-2$. Il existe donc des complexes a et b tels que

$$\chi_A = X^{n-1}(X^2 + aX + b)$$

La trace est l'opposé du coefficient de X^{n-1} dans le polynôme caractéristique et donc $a = 0$ et

$$\chi_a = X^{n-1}(X^2 + b)$$

Comme $A^n \neq 0$, $b \neq 0$ et $X^2 + b$ admet deux racines distinctes non nulles. On a donc deux valeurs propres supplémentaires dont chaque sous-espace propre est au moins de dimension 1. La somme des dimensions des sous-espaces propres est au moins égale à $n - 2 + 1 + 1 = n$. A est ainsi diagonalisable (et on a exactement trois sous-espaces propres de dimensions $n - 2, 1, 1$).

Planche 60
$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t.$

1. Déterminer l'ensemble A sur lequel f est définie.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(A)$ et exprimer $f'(x)$.
3. Déterminer une autre expression de $f(x)$.
4. Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^2}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Solution 60

1. $h_x\ :\ t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur $x - 1$.
   Si $x > 0$ alors $h_x(t) = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et donc intégrable.
   Si $x = 0$ alors $h_0(t) \sim -1/t$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Si $x < 0$ alors h_x est de limite infinie en $+\infty$ et donc non intégrable.
   On a donc
   $$A = \mathbb{R}^{+*}$$
2. On applique le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x > 0,\ h_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall t > 0,\ x \mapsto h_x(t)$ est de classe C^1 de dérivée $x \mapsto e^{-xt}$.
   - $\forall x > 0,\ t \mapsto e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in [a, b],\ \forall t > 0,\ |e^{-xt}| \leq e^{-at}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^{+}*$.

   f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et
   $$\forall x > 0,\ f'(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$$
3. Comme $f(1) = 0$, on en déduit que
   $$\forall x > 0,\ f(x) = \ln(x)$$

4. Dans l'expression de $f(x)$, on pose $u = e^{-t}$ (licite car $t \mapsto e^{-t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ à dérivée ne s'annulant pas) :
$$f(x) = \int_1^0 \frac{u - u^x}{-\ln(u)} \frac{du}{(-u)}$$
Pour $x = 3$, on obtient
$$\int_0^1 \frac{1 - t^2}{\ln t}\, \mathrm{d}t = -\ln(3)$$

Planche 61
Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$.

Solution 61
On devine que la limite est la même que celle de
$$\int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_{ax}^{bx} = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$
On forme la différence pour montrer qu'elle est de limite nulle :
$$\int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t)}{t}\, dt - \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t) - 1}{t}\, dt$$
$t \mapsto \frac{\cos(t)-1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de limite nulle en 0 (car $\cos(t) = 1 + o_0(t)$). C'est une fonction qui est ainsi prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet une primitive F par théorème fondamental et la quentité ci-dessus vaut $F(bx) - F(ax)$ et est de limite nulle en 0.
$$\lim_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Planche 62
On donne $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1 + t^2} \mathrm{d}t$.

1. Donner l'intervalle de définition D_F de F.
2. Etudier la continuité de F sur D_F.
3. Donner les valeurs de $F(0)$, $F(1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
4. Prouver que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et donner la valeur de F'.
5. Prouver qu'on a $\forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\},\ F'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$. En déduire $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx$.

Solution 62

1. Soit $g : (x, t) \mapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$; pour tout x, $g(x, .)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a un unique problème d'existence de l'intégrale au voisinage de $+\infty$. Mais,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 0,\ |g(x, t)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + t^2} \qquad (*)$$
ce qui prouve l'intégrabilité de $g(x, .)$ au voisinage de $+\infty$. A fortiori, F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout t, $x \mapsto g(., t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. La question précédente donne une domination indépendante de x et par théorème sur les intégrales à paramètres, $F \in C^0(\mathbb{R})$.

3. On a tout d'abord
$$F(0) = 0$$
$$F(1) = \left[\frac{1}{2}\arctan(t)^2\right]_0^{\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$
On veut étudier F en $+\infty$. On utilise pour cela le théorème de convergence dominée pour un paramètre réel.
   - Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $g(x,t) \to \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ quand $x \to +\infty$. *On peut remarquer que $t \mapsto \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ est intégrable et il est donc possible que le théorème s'applique.*
   - On veut majorer $|g(x,t)|$ pour $t \geq 0$ par une quantité indépendante de x dans un voisinage de $+\infty$. C'est ce que l'on a fait dans $(*)$ où on a un majorant indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Le théorème s'applique et donne
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\pi}{2(1+t^2)}\, dt = \frac{\pi^2}{4}$$

4. g admet sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ une dérivée partielle par rapport à x qui est continue sur cet ensemble et, pour tout $a > 0$,
$$\forall |x| \geq a,\ \forall t \geq 0,\ |\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2a^2)}$$
Le majorant étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ($a > 0$), F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (puisque sur $\mathbb{R}\backslash]-a,a[$ pour tout $a > 0$) et
$$\forall x \neq 0,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\, dt$$

5. Le calcul de l'intégrale se fait classiquement à l'aide d'une décomposition en éléments simples. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$,
$$\frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2t}{1+t^2x^2} - \frac{t}{1+t^2}\right)$$
Chaque morceau se primive en un logarithme et on trouve
$$\forall x \in]0,+\infty[\backslash\{1\},\ F'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$$
D'après ce qui précède,
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx = \int_0^1 F'(x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{\pi^2}{8}$$

Planche 63

Soit E un espace vectoriel normé de dimension n et f un endomorphisme diagonalisable de E. On pose : $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = u \circ f$.

1. Montrer que φ est diagonalisable.

2. Donner ses éléments propres.

Solution 63

1. On constate que $\varphi^2(v) = v \circ f^2$ et plus généralement (récurrence) que $\varphi^k(v) = v \circ f^k$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ (même pour $k = 0$). Par combinaisons linéaires, on en déduit que
$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(\varphi)\ :\ v \mapsto v \circ P(f)$$
f étant diagonalisable, elle admet un polynôme annulateur scindé simple et ce même polynôme annule φ. φ est donc aussi diagonalisable.

2. Pour λ valeur propre de f, on note E_λ le sous-espace propre associé. Les E_λ sont supplémentaires dans E. Pour définir un endomorphisme de E, il suffit de le définir sur les E_λ. On a
$$\forall v \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E_\lambda,\ \varphi(v)(x) = v(f(x)) = \lambda v(x)$$
Si v est nul sur les E_μ pour $\mu \neq \lambda$ alors $\varphi(v) = \lambda v$ (l'égalité ayant alors lieu sur tousles sous-espaces propres de f). On en déduit que
$$F_\lambda = \{v \in \mathcal{L}(E)/\ \forall \mu \neq \lambda,\ v|_{E_\mu} = 0\} \subset \ker(\varphi - \lambda\mathrm{id})$$
F_λ est de dimension $n \times \dim(E_\lambda)$ (il est isomorphe à $\mathcal{L}(E_\lambda, E)$). La somme des dimensions des sous-espaces F_λ est donc égale à $n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$. On en déduit que
$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(f) \ \text{ et } \ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ \ker(\varphi - \mathrm{Id}) = F_\lambda$$

Planche 64

Soient E un espace vectoriel normé, A, B des parties de E.

1. Donner la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
2. Montrer que $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$
3. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et que l'on n'a pas $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Solution 64

1. Soit $a \in E$. $a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers a.

2. Supposons $A \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe (a_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a. Mais puisque $A \subset B$, (a_n) est aussi une suite d'éléments de B et donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $a \in \bar{B}$. Donc $\bar{A} \subset \bar{B}$.

3. Comme $A \cap B \subset A$, la question précédente donne $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$. De même $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ et donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
On prend $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$. Alors $\overline{A} = [0, 1]$, $\overline{B} = [1, 2]$, donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Par ailleurs, $A \cap B = \emptyset$ et donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$. On n'a pas $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Planche 65

Soit E un evn donné.

1. Donner la définition d'un ouvert de E
2. Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert de E
3. Montrer que tout ouvert est réunion de boules ouvertes

Solution 65

1. Soit A une partie de E, A est une partie ouverte de E si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte centrée en a et de rayon r soit incluse dans A.

2. Soit $A = B(x, \rho)$ avec $x \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $a \in A$. Posons $r = \rho - \|x - a\|$. On a bien $r > 0$ puisque $a \in B(x, \rho)$. Soit $y \in B(a, r)$. Alors $\|y - x\| \leq \|y - a\| + \|a - x\| < r + \|a - x\| \leq \rho$. On a donc $y \in B(x, \rho)$ et finalement $B(a, r) \subset A$. Donc, A est une partie ouverte.

3. Soit A une partie ouverte. Pour tout $a \in A$, il existe $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset A$. Alors, $\bigcup_{a \in A} B(a, r_a) \subset A$. Comme on a clairement $A \subset \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$, on a finalement $A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$, donc A est une réunion de boules ouvertes.

Planche 66

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.

2. Factoriser $P = 4X^4 + 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Trouver deux diviseurs de 40301.

Solution 66

1. On cherche d'abord les racines de $4X^2 + 3X + 1$, on trouve $r_1 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{8}$ et $r_2 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{8}$. On cherche ensuite les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de r_1 et r_2. On les cherche sous la forme $a + ib$, on a alors, pour r_1, $a^2 - b^2 = -\frac{3}{8}$, $2ab = -\frac{\sqrt{7}}{8}$ et en ajoutant l'égalité des modules, on a $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$. Donc on obtient comme racines carrées de r_1 : $s_1 = \frac{1-i\sqrt{7}}{4}$ et $s_2 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{4}$. On trouve de même comme racines carrées de r_2 : $s_3 = \frac{1+i\sqrt{7}}{4}$ et $s_4 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{4}$. s_1, s_2, s_3 et s_4 sont les solutions de l'équation proposée.

2. $P = 4(X - s_1)(X - s_2)(X - s_3)(X - s_4)$. En regroupant s_1 et s_3 qui sont conjuguées et s_2 avec s_4, on obtient $P = (2X^2 - X + 1)(2X^2 + X + 1)$.

3. Prenons $x = 10$, alors $x^2 = 100$ et $x^4 = 10000$. On a alors $P(x) = 40301$. La factorisation de la question précédente, donne $P(x) = (2x^2 - x + 1)(2x^2 + x + 1)$, i.e. $40301 = 191 \times 211$.

Planche 67

Soit E l'ensemble des matrices $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que E est un anneau.

3. Soit la fonction φ telle que $\varphi(a+\mathrm{i}b) = M(a, b)$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ dans E.

4. φ est-il un morphisme d'anneaux ?

Solution 67

1. $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

2. Montrons que E est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$. C'est bien un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ puisque c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$. $I_2 \in E$. Il reste à montrer que E est stable par multiplication. Or si (a, b) et (a', b') sont dans $\mathbb{R}^2$, alors
$M(a, b)M(a', b') = M(aa' - bb', ab' + ba') \in E$.

3. φ est bien ($\mathbb{R}$)-linéaire. Le noyau de φ est réduit à $\{0\}$, donc φ est injectif. Comme $\mathbb{C}$ et E sont tous les deux de dimension 2 en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4. On sait déjà que pour z et z' dans $\mathbb{C}$, $\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')$. On a bien $\varphi(1) = I_2$. Il reste à regarder $\varphi(zz')$. Or avec la question précédente, on reconnaît $\varphi(z)\varphi(z') = \varphi(zz')$. φ est bien un morphisme d'anneaux.

Planche 68

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \wedge 10 = 1$. Montrer que $n^4 \equiv 1[10]$.

2. On suppose $a \wedge 10 = 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^{4\times 10^k} \equiv 1[10^{k+1}]$.

Solution 68

1. Il suffit d'appliquer le théorème d'Euler : $\varphi(10) = \varphi(2 \times 5) = \varphi(2)\varphi(5)$ puisque 2 et 5 sont premiers entre eux. Par ailleurs, $\varphi(2) = 2 - 1 = 1$ et $\varphi(5) = 5 - 1 = 4$, donc $\varphi(10) = 4$.

2. De même, puisque $\varphi(10^{k+1}) = \varphi(2^{k+1} \times 5^{k+1}) = \varphi(2^{k+1})\varphi(5^{k+1})$ puisque 2^{k+1} et 5^{k+1} sont premiers entre eux. Par ailleurs, $\varphi(2^{k+1}) = 2^{k+1} - 2^k = 2^k$ et $\varphi(5^{k+1}) = 5^{k+1} - 5^k = 5^k \times 4$, donc $\varphi(10) = 4 \times 10^k$. Par ailleurs, si a est premier avec 10, alors a est premier avec 10^{k+1}.

Planche 69

Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On note $M = (X_iX_j)_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Donner les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{Tr}(M)$.

2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur ?

Solution 69

1. Posons $L = (X_1 \cdots X_n)$. Alors $M = \begin{pmatrix} X_1L \\ \vdots \\ X_nL \end{pmatrix}$. Donc M est de rang inférieur ou égal à 1 : $\mathrm{rg}(M)$ peut prendre les valeurs 0 ou 1.

$$\mathrm{rg}(M) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i = 0.$$

Comme les X_i sont mutuellement indépendantes

$$\mathbb{P}(\mathrm{rg}(M) = 0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n.$$

$\mathrm{rg}(M)$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.
$\mathrm{Tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ puisque X_i ne prend que les valeurs 0 ou 1. $\mathrm{Tr}(M)$ est donc la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathrm{Tr}(M)$ suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

2. D'après le début de la question précédente, on a $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$. M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$ donc si et seulement si $\mathrm{Tr}(M)M = M$ ou encore $(\mathrm{Tr}(M) - 1)M = 0$ donc si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) = 1$ ou $M = 0$. Ces deux événement étant incompatibles, si on note E l'événement "M est la matrice d'un projecteur"

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1) + \mathbb{P}(M = 0) = np(1-p)^{n-1} + (1-p)^n = ((n-1)p + 1)(1-p)^{n-1}.$$