MINES TELECOM

Planche 1
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Notons π le polynôme minimal de u.
Montrer que $P(u)$ est bijectif si et seulement si P et π sont premiers entre eux.

Planche 2
On étudie la série entière $\sum \ln(n)x^n$. On note u sa somme.

1. Donner le rayon de convergence de cette série entière.
2. Développer en série entière $x \mapsto (1-x)u(x) + \ln(1-x)$ sur $]-1, 1[$.
3. Montrer que cette dernière série entière converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire un équivalent en 1^- de $u(x)$.

Planche 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}} dt$.

1. Trouver la limite de (I_n). On la notera a.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2(I_n - a)$. Etudier la limite de (u_n).

Planche 4
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec B nilpotente et $AB = BA$. Montrer que $\det(I_n + B) = 1$, puis que $\det(A + B) = \det(A)$. *On pourra commencer par supposer A inversible.*

Planche 5
$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+inx}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Planche 6
Soit f un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f_{|\mathbb{Z}}$ et $f_{|\mathbb{Q}}$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est monotone.
4. Déterminer f.

Planche 7
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue et bornée. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx$.

Planche 8
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 0$, $A^n \neq 0$. A est-elle diagonalisable ?

Planche 9
Sous forme décimale, (2021)! se termine par combien de 0 ?

Planche 10
Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_{2n}[X] \to \mathbb{R}[X]$ tel que pour $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$, $\varphi(P) = X(X+1)P' - 2kXP$.

1. Trouver k pour que φ soit un endomorphisme.
2. Trouver les valeurs propres de φ et les sous-espaces propres associés.

Planche 11
Déterminer la nature de la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^\alpha}{a(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$$

avec $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Planche 12
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AA^T et A^TA sont semblables.

Planche 13
Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X sachant $(Y = n)$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{3}\right)$. Déterminer la loi de X.

Planche 14
Soient A et B deux matrices colonnes comportant le même nombre de lignes. On pose
$M = AB^T + BA^T$. Déterminer le rang de M. Déterminer les éléments propres de M.

Planche 15
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. A est-elle inversible ?
2. A est-elle diagonalisable ?

Planche 16
Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Quel est le domaine de définition D de S ?
2. Exprimer S pour $x \in D$.
3. Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} S(x)dx$.

Planche 17
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$, $u : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable et donner son polynôme minimal.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Planche 18
Soit

$$(E) \quad 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

On cherche toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles vérifiant (E).
On pose $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - 2y, x - 3y)$.

1. Montrer que Φ est bijective et que Φ et Φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles vérifiant (E).
   On pose $g = f \circ \Phi^{-1}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de celles de g.
3. Résoudre le problème posé.

Planche 19
Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathrm{rg}(M) = 1$. Montrer

$$\mathrm{Tr}(AM) = 0 \iff MAM = 0.$$

Planche 20
Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $I_n = \int_0^1 t^n |\ln(1-t)|^\alpha dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour quelles valeurs de α, I_n converge -t-elle ?
2. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$?
3. $\sum I_n$ converge-t-elle ?

Planche 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?
2. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer
$$\{0\} \subset \mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}.$$
   (b) Montrer que les sous-espaces propres de M sont de dimension 1.
   (c) Résoudre $M^2 = A$ (équation matricielle d'inconnue M).

Planche 22

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $S = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de S et l'espérance de S.
2. Calculer l'espérance de T.
3. S et T sont-elles indépendantes ?

Planche 23

(E) $y'' = (x^4 + 1)y$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 1$.
2. On admet que $x \mapsto \frac{1}{f(x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $g : x \mapsto f(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Planche 24

1. Rappeler la factorisation de $a^n - b^n$ avec a, b et n des entiers naturels, n non nul.
2. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est de la forme $n = 2^p$, avec $p \in \mathbb{N}$.
3. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $F_m = 2^{(2^m)} + 1$. Montrer que si $n \neq m$ alors F_n et F_m sont premiers entre eux.
   Les F_n sont les nombres de Fermat. F_5 n'est pas premier...

Planche 25

Soit A une matrice antisymétrique. On pose $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)A - M^T$.

1. Montrer que φ est un automorphisme.
2. Montrer que φ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et la dimension de ses sous-espaces propres.

Planche 26
Soit $f :]0,1[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\int_x^{x^2}\frac{\ln(1-t)}{t}dt$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$.

Planche 27
Pour $p,q\in\mathbb{N}$, on pose

$$I_{p,q}=\int_0^1 x^p(-\ln(x))^q\,dx$$

1. Montrer que

$$I_{p,q}=\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$$

2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}=\int_0^1 x^{-x}\,dx$$

Planche 28
Pour $a,b\in\mathbb{C}$, calculer le déterminant

$$D_n=\begin{vmatrix}a+b & ab & 0 & \dots & 0\\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab\\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b\end{vmatrix}$$

Planche 29

1. Existence de $\int_0^1\frac{\ln(1-t)\ln(t)}{t}\,dt$.
2. Calcul. Indication : passer par une somme infinie.

Planche 30
On pose $J_n=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}$.

1. J_n est-elle $\mathbb{C}$-diagonalisable ? Donner son spectre.
2. Calculer les puissances de J_n.

Planche 31

Soit (a_n) une suite bornée de réels.

1. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ converge pour tout x. On note f sa somme.
2. Montrer que
$$\forall t > 1,\ \int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}}$$

Planche 32

Soit E un e.v.n. de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose avoir $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$. Montrer que u est inversible.
2. Soit $v\ :\ \begin{cases} \mathrm{Im}(u) \to \mathrm{Im}(u) \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$. En utilisant v, montrer l'existence de $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$ et $\deg(P) \leq \mathrm{rg}(u) + 1$.

Planche 33

On note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver l'existence de
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)2^{n+1}}$$
2. Calculer S à l'aide d'une série entière.

Planche 34

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{2018} = A^{2016}$.

1. On suppose que A est symétrique. Montrer que $\sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \mathrm{rg}(A)$.
2. Ce résultat reste-t-il vrai avec la seule hypothèse de diagonalisabilité de A ?

Planche 35

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que $\det(A) = 1$.

Planche 36

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Pour $x \geq 0$ et $n \geq 0$, on pose $u_n(x) = \arctan(\sqrt{n+x}) - \arctan(\sqrt{n})$.
   (a) Etudier la convergence simple et normale de $\sum (u_n)_{n \geq 0}$.
   (b) La somme S de la série est-elle continue ? De classe C^1 ?

Planche 37
Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}$$

Planche 38
Soient $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer la valeur minimale de

$$\Delta_{a,b} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Planche 39
On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge.

1. Montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que si $x, y \in \ell^2$, $\sum (x_n y_n)$ converge.
   (b) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur ℓ^2 en posant
   $$(x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $\varphi \ : \ x \in \ell^2 \mapsto x_p \in \mathbb{R}$. Montrer que φ est une forme linéaire continue.
4. Déterminer l'orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ (assimilé à l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang).

Planche 40
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i, \ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Planche 41
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non nulle. On définit u par : $u(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que u est un endomorphisme. Trouver son noyau et son rang. u est-il diagonalisable ?

Planche 42
Nature et caractéristiques de l'endomorphisme associé à la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Planche 43
Etudier la convergence de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\sqrt{x}}\,dx$.

Planche 44
On veut montrer qu'il n'existe pas de $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}$.

1. Traiter le cas $n = 1$.
2. Traiter le cas général en considérant : $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

Planche 45
On considère la suite de terme général $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,dt$.

1. Etudier la convergence de (u_n).
2. Montrer l'existence d'un $c > 0$ tel que $u_n \sim \frac{c}{n}$.
3. Quel est le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$?
4. Etudier la convergence en R et $-R$.

Planche 46
Soient X, Y deux variables indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $U = \frac{X}{Y}$

1. Calculer $\mathbb{E}(U)$.
2. Donner la loi de U.
3. Commenter la position de $\mathbb{E}(U)$ par rapport à 1.

Planche 47
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. On considère une fonction X vérifiant

$$X'(t) = AX(t)$$

1. Montrer que si V est un vecteur propre de A associé à λ et si $X(0) = V$ alors $\forall t,\ X(t) = e^{\lambda t}V$.
2. De façon générale, donner l'expression de $X(t)$ en fonction de $X(0)$.

Planche 48
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -7x(t) + 5y(t) - z(t) \\ z'(t) = -6x(t) + 6y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

Planche 49
Nature de la série $\sum \sin((2+\sqrt{3})^n\pi)$.

Planche 50
Soit des entiers naturels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 2 à 2 distincts. On note $P = -1 + \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$. On suppose qu'on peut décomposer P en produit AB de polynômes à coefficients entiers , démontrer qu'un des deux polynômes et de degré n.

Planche 51
Soit A et B deux matrices à coefficients réels carrées d'ordre 3. On suppose que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Montrer que pour tout réel x, $\det(A + xB) = 0$.

Planche 52
On considère deux entiers naturels non nuls n et p.

1. On suppose que n divise p, montrer que $X^n - 1$ divise $X^p - 1$.
2. On note d le pgcd de n et p, calculer le pgcd et $X^n - 1$ et $X^p - 1$.

Planche 53
Pour a un réel quelconque, étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a \ln(t + e^{at})\, dt$.

Planche 54
Soit A une matrice carrée à coefficients complexes. Démontrer l'équivalence entre les 2 assertions suivantes.
i. La suite (A^n) converge vers la matrice nulle.
ii. La suite (A^n) converge et la suite numérique $(\mathrm{Tr}(A^n))$ converge vers 0.

Planche 55
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $A^3 = A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Planche 56
On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ à termes positifs et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ avec v_n défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$

1. Dans cette question uniquement, $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ quand $n \to +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$.
2. On suppose que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ convergent. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ diverge.
3. Montrer que si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Planche 57

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}
2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = I_X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Planche 58

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue bornée. Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$.

Planche 59

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ n \geqslant 2$, telle que $\operatorname{rg} A = 2,\ \operatorname{Tr} A = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Planche 60

$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble A sur lequel f est définie.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(A)$ et exprimer $f'(x)$.
3. Déterminer une autre expression de $f(x)$.
4. Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Planche 61

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$.

Planche 62

On donne $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'intervalle de définition D_F de F.
2. Etudier la continuité de F sur D_F.
3. Donner les valeurs de $F(0)$, $F(1)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Prouver que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et donner la valeur de F'.
5. Prouver qu'on a $\forall x \in]0, +\infty[\setminus\{1\},\ F'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$. En déduire $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx$.

Planche 63
Soit E un espace vectoriel normé de dimension n et f un endomorphisme diagonalisable de E. On pose : $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = u \circ f$.

1. Montrer que φ est diagonalisable.
2. Donner ses éléments propres.

Planche 64
Soient E un espace vectoriel normé, A, B des parties de E.

1. Donner la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
2. Montrer que $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$
3. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et que l'on n'a pas $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Planche 65
Soit E un evn donné.

1. Donner la définition d'un ouvert de E
2. Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert de E
3. Montrer que tout ouvert est réunion de boules ouvertes.

Planche 66

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.
2. Factoriser $P = 4X^4 + 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Trouver deux diviseurs de 40301.

Planche 67
Soit E l'ensemble des matrices $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que E est un anneau.
3. Soit la fonction φ telle que $\varphi(a+\mathrm{i}b) = M(a,b)$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ dans E.
4. φ est-il un morphisme d'anneaux ?

Planche 68

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \wedge 10 = 1$. Montrer que $n^4 = 1[10]$.
2. On suppose $a \wedge 10 = 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^{4\times 10^k} = 1[10^{k+1}]$.

Planche 69

Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On note $M = (X_iX_j)_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Donner les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{Tr}(M)$.

2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur ?