

## MINES-PONTS

**Exercice 1**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $S$  l'ensemble des  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathcal{C}^m(\mathbb{R}))^n$  vérifiant :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, \quad x_p^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^n a_{p,i} x_i(t).$$

Montrer que  $A$  est nilpotente si et seulement si tous les éléments de  $S$  sont des fonctions polynomiales. On pourra regarder ce qui se passe pour  $m = 1$ .

**Solution 1**

Pour  $m = 1$ , on note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Alors  $(x_1, \dots, x_n) \in S$  si et seulement si  $X$  est solution de  $X' = AX$ .

Or les solutions de cette équation sont les  $t \mapsto \exp(tA)X_0$ , avec  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Supposons  $A$  nilpotente, et notons  $p$  son indice de nilpotence. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $k \geq p$ ,  $A^k = 0$  et donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tA) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} A^k$ . Alors les  $x_p$  sont bien polynomiales pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Réciproquement, supposons que tous les éléments de  $S$  soient polynomiales et montrons que  $A$  est nilpotente.

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k E_i$  est polynomiale. Donc il existe  $n_i \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si  $k \geq n_i$ , alors  $A^k E_i = 0$ .

Si on prend  $n_0 = \max_{1 \leq i \leq n} n_i$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq n_0$ , on a pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A^k E_i = 0$ .

Mais alors, pour tout  $k \geq n_0$ ,  $A^k = 0$  :  $A$  est bien nilpotente.

On suppose que  $m \geq 2$ . On pose  $Y = \begin{pmatrix} X \\ X' \\ \vdots \\ X^{(m-1)} \end{pmatrix}$ .  $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{nm,1}(\mathbb{R}))$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in S$  si et

seulement si  $Y$  est solution de  $Y' = MY$ , avec  $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & I_n \\ A & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ .

On remarque que  $M^m = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix}$  et donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $M^{mp} = \begin{pmatrix} A^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^p \end{pmatrix}$ .

D'une part,  $M$  est donc nilpotente si et seulement si  $A$  est nilpotente.

D'autre part,  $(x_1, \dots, x_n)$  est polynomiale si et seulement si  $X$  l'est, si et seulement si  $Y$  l'est. On peut donc appliquer le cas  $m = 1$  au nouveau système  $Y' = MY$ . On obtient bien le résultat voulu.

**Exercice 2**

Montrer que toute fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, peut s'écrire  $g - h$  avec  $g$  et  $h$  convexes sur  $\mathbb{R}$ .

On pourra penser aux parties positive et négative de  $f''$ .

**Solution 2**

Posons  $\alpha = \max(0, f'')$  et  $\beta = \max(0, -f'')$ .  $\alpha$  et  $\beta$  sont continues sur  $[a, b]$  puisque  $f''$  l'est.  $f'' = \alpha - \beta$ . On peut ainsi primitiver deux fois ces fonctions. On pose  $A : x \mapsto \int_a^x \alpha(t) dt$  et  $B : x \mapsto \int_a^x \beta(t) dt$ . Par le théorème fondamental de l'intégration,  $A$  et  $B$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et  $A' = \alpha$  et  $B' = \beta$ . Ainsi, on a  $A' - B' = f''$ .

On pose ensuite  $\tilde{g} : x \mapsto \int_a^x A(t) dt$  et  $\tilde{h} : x \mapsto \int_a^x B(t) dt$ . De même  $\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  de dérivées respectives  $A$  et  $B$ .  $\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  sont donc de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$  et de dérivées secondes respectives  $\alpha$  et  $\beta$ . Ces dernières sont positives :  $\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  sont convexes sur  $[a, b]$ .

Par ailleurs, on a  $(\tilde{g} - \tilde{h})'' = f'' : \tilde{g} - \tilde{h}$  et  $f$  diffèrent donc d'une fonction affine. On note  $p = f - (\tilde{g} - \tilde{h})$ . Une fonction affine est convexe. On peut donc enfin poser  $g = \tilde{g} + p$  et  $h = \tilde{h}$ . Ces deux fonctions sont convexes et on a bien  $f = g - h$ .

**Exercice 3 Mines Ponts**

Soit  $a > -1$ .

1. Montrer que  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a \sin^2(t)} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$ . On pourra faire le changement de variable  $x = \tan(t)$ .
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Quelle est la nature de  $\sum_{n \geq 1} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} dt$  ?
3. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Quelle est la nature de  $\sum \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt$  ?
4. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Quelle est la nature de  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt$  ?

**Solution 3**

1. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+a \sin^2(t)}$  est continue sur le segment  $[0, \pi/2]$ , l'intégrale est donc bien définie. La fonction  $t \mapsto \tan(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et bijective de  $[0, \pi/2[$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour  $t \in [0, \pi/2[$ , si on pose  $x = \tan(t)$ , alors

$$x^2 = \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = \frac{\sin^2(t)}{1 - \sin^2(t)}$$

et donc

$$\sin^2(t) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

On a donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a \sin^2(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a \frac{x^2}{1+x^2}} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+a)x^2} dx.$$

On obtient bien alors

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a \sin^2(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{1+a}} [\text{Arctan}((\sqrt{1+a})x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} dt$ . Avec la question précédente,

$$u_n = \frac{\pi}{2\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}}.$$

Si  $\alpha \leq 0$ ,  $\sum u_n$  diverge grossièrement et si  $\alpha > 0$

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 2$ .

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$  est continue sur  $[n\pi, n\pi + \pi]$  et donc  $v_n$  est bien définie.

Pour  $n = 0$ , si  $\alpha \geq 0$ , il en est de même.

Mais si  $\alpha < 0$ ,  $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$  n'est a priori continue que sur  $]0, \pi]$ . Mais cette fonction possède une limite finie en  $0^+$ , donc l'intégrale existe bien.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On effectue le changement de variable  $u = t - n\pi$  dans  $v_n$ , on obtient

$$v_n = \int_0^\pi \frac{1}{1 + (n\pi + u)^\alpha \sin^2(u)} du.$$

Par symétrie du graphe de  $\sin$  sur  $[0, \pi]$  par rapport à la droite d'abscisse  $x = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$2v_n = \int_0^\pi \frac{1}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} dt.$$

Par monotonie de  $t \mapsto t^\alpha$  et croissance de l'intégrale, on encadre  $2v_{n+1} \leq v_n \leq 2v_n$  dans le cas  $\alpha > 0$  et  $2v_n \leq v_n \leq 2v_{n+1}$  dans le cas  $\alpha \leq 0$ , ce qui permet de conclure que  $\sum v_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 2$ .

4.  $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolongeable par continuité en 0. Donc, on ne s'intéresse qu'à son comportement en  $+\infty$ .

On suppose  $\alpha > 2$ .

Cette fonction est positive, il suffit donc de majorer les intégrales partielles pour conclure à son intégrabilité.

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . On pose  $N = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$ . On a  $x < (N+1)\pi$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Alors

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt \leq \int_0^{N\pi+\pi} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt.$$

Par relation de Chasles, on reconnaît alors la somme partielle  $S_N$  de la série précédente et, en notant  $S$  sa somme,

$$f(x) \leq S_N \leq S.$$

On peut ainsi conclure que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt$  converge.

Dans le cas où  $\alpha \leq 2$ , on va chercher à montrer que cette intégrale diverge, en minorant ses intégrales partielles.

Pour  $x \geq \pi$ , on pose  $N = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$ . On a, en utilisant les mêmes notations,

$$f(x) \geq S_{N-1}.$$

Mais dans ce cas,  $S_N \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  (séries à termes positifs divergente) et, comme  $N$  diverge vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on peut conclure que  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et finalement  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)} dt$  diverge.

#### Exercice 4

Soit  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien. Soit  $a \in E$ . Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on pose

$$f_\alpha : x \mapsto x + \alpha(a|x)a.$$

1. Pour  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , calculer  $f_\alpha \circ f_\beta$ .

2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $f_\alpha$  est-elle inversible et si oui calculer son inverse.

3. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f_\alpha$ .

#### Solution 4

1. On trouve

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta\|a\|^2}.$$

2. Premier cas :  $1 + \alpha\|a\|^2 \neq 0$ . On pose  $\beta = \frac{-\alpha}{1+\alpha\|a\|^2}$ . On a alors

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha = \text{Id}_E.$$

$f_\alpha$  est bien bijective et son inverse est  $f_\beta$ .

Deuxième cas :  $1 + \alpha\|a\|^2 = 0$ .

Alors on remarque que  $f_\alpha(a) = 0$  alors que  $a$  n'est pas nul. Donc  $f_\alpha$  n'est pas injective et donc ne peut pas être bijective.

3. Premier cas :  $a = 0$  ou  $\alpha = 0$ . Alors  $f_\alpha = \text{Id}_E$ , donc elle possède une seule valeur propre : 1 et son sous-espace propre associé est  $E$ .

Deuxième cas :  $a \neq 0$  et  $\alpha \neq 0$ . Posons  $H = a^\perp$ .  $H$  est un hyperplan de  $E$ . Pour tout  $x \in E$ ,  $f_\alpha(x) = x$  si et seulement si  $x \in H$ . Donc 1 est une valeur propre de  $f_\alpha$  et son sous-espace propre associé est  $H$ .

On calcule  $f_\alpha(a) = (1 + \alpha\|a\|^2)a$  et  $1 + \alpha\|a\|^2 \neq 1$ . On vient donc de trouver une nouvelle valeur propre, dont le sous espace propre est la droite vectorielle engendrée par  $a$ .

#### Exercice 5

On s'intéresse à la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\frac{2\pi n}{3})}{n} x^n$ .

Donner son rayon de convergence. On note  $f$  sa somme. Quel est le domaine de définition  $D$  de  $f$  ? Que vaut  $f(x)$  pour tout  $x \in D$  ?

#### Solution 5

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| \frac{\cos(\frac{2\pi n}{3})}{n} \right| \leq 1$ , donc le rayon de convergence cherché  $R$  est plus grand que celui de  $\sum x^n$ , i.e.  $R \geq 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| \frac{\cos(\frac{2\pi n}{3})}{n} \right| \geq \frac{1}{2n}$ , donc le rayon de convergence cherché  $R$  est plus petit que celui de  $\sum \frac{1}{2n} x^n$ , i.e.  $R \leq 1$ . Finalement,  $R = 1$ .

On a donc  $] -1, 1[ \subset D \subset [-1, 1]$ .

Pour  $x = 1$  : une transformation d'Abel permet de montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\frac{2\pi n}{3})}{n}$  converge. En effet,  $(\frac{1}{n})$  est bien décroissante et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{i\frac{2\pi k}{3}}\right) = \text{Re}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{1 - e^{i\frac{2\pi n}{3}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right) = \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

et donc

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On fait de même en  $-1$ . Finalement,  $D = [-1, 1]$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$  et pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) x^{n-1} = \text{Re}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \sum_{n=1}^{+\infty} (xe^{i\frac{2\pi}{3}})^{n-1}\right) = \text{Re}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{1 - xe^{i\frac{2\pi}{3}}}\right).$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1+2x}{1+x+x^2}.$$

Il existe donc  $c \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x+x^2) + c.$$

Comme  $f(0) = 0$ ,  $c = 0$  et finalement, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x+x^2)$ .

Comme  $f$  converge en 1 et  $-1$ , le théorème d'Abel radial permet d'affirmer que  $f$  est continue sur  $[-1, 1]$  et donc l'expression trouvée sur  $]-1, 1[$  est aussi valable en 1 et  $-1$ .

### Exercice 6

Soit  $(X_1, \dots, X_N)$  une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que chaque  $X_i$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

1. Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\mathbb{P}(X_i \leq n)$ .
2. Soit  $Y = \max_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} (X_i)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\mathbb{P}(Y \leq n)$  et en déduire  $\mathbb{P}(Y = n)$ .
3.  $Y$  possède-t-elle une espérance finie ? Si oui, la calculer.

### Solution 6

1.

$$\mathbb{P}(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{k=1}^n p(1-p)^{k-1} = p \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^n.$$

2.

$$\mathbb{P}(Y \leq n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^N (X_i \leq n)\right).$$

Les  $X_i$  étant mutuellement indépendantes,

$$\mathbb{P}(Y \leq n) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(X_i \leq n) = (1 - (1-p)^n)^N.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \leq n) - \mathbb{P}(Y \leq n-1) = (1 - (1-p)^n)^N - (1 - (1-p)^{n-1})^N.$$

Pour  $n = 1$ ,  $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y \leq 1) = p^N$ .

3.  $(1-p)^n$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On a donc

$$\mathbb{P}(Y = n) = 1 - N(1-p)^n + o((1-p)^n) - [1 - N(1-p)^{n-1} + o((1-p)^{n-1})] = \frac{Np}{1-p} (1-p)^n + o((1-p)^n)$$

Il s'en suit que

$$n^2 \cdot n \mathbb{P}(Y = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{Np}{1-p} n^3 (1-p)^n$$

et par croissances comparées,  $n^2 \cdot n \mathbb{P}(Y = n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Par comparaison aux séries de Riemann,  $\sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}(Y = n)$  converge absolument et donc  $Y$  possède

une espérance finie.

On trouve

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left( (1 - (1-p)^n)^N - (1 - (1-p)^{n-1})^N \right).$$

Avec le binôme de Newton, puis par linéarité de la somme d'une série :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k ((1-p)^k - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} n ((1-p)^k)^n.$$

Finalement,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{1 - (1-p)^k}.$$

### Exercice 7

On pose, pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{(1+x^2)(x^2+a^2)} dx.$$

Ecrire  $J(a)$  en fonction de  $a$ ,  $I$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$  et calculer cette dernière intégrale.

### Solution 7

Tout d'abord, on remarque que ces intégrales existent bien car les deux intégrandes sont continues sur  $\mathbb{R}_+^*$  et dominées par  $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$  au voisinage de  $+\infty$  et par  $x \mapsto \frac{1}{x^{1/2}}$  au voisinage de 0.

Par parité, il suffit de considérer que  $a > 0$ . Dans un premier temps on suppose de plus que  $a \neq 1$ . Alors, pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{a^2-1} \left( \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+a^2} \right).$$

Il s'en suit, par linéarité de l'intégrale

$$J(a) = \frac{1}{a^2-1} I - \frac{1}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{a^2+x^2} dx.$$

On effectue le changement de variable  $y = \frac{x}{a}$  dans la dernière intégrale, il vient

$$\begin{aligned} J(a) &= \frac{1}{a^2-1} I - \frac{1}{(a^2-1)a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(ay)}{1+y^2} dy \\ &= \frac{1}{a^2-1} I - \frac{1}{(a^2-1)a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(a) + 2\ln(a)\ln(y) + \ln^2(y)}{1+y^2} dy \\ &= \frac{1}{a^2-1} I - \frac{\ln^2(a)}{(a^2-1)a} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{(a^2-1)a} I - \frac{2\ln(a)}{(a^2-1)a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(y)}{1+y^2} dy \\ &= \frac{1}{a(a+1)} I - \frac{\ln^2(a)}{(a^2-1)a} \frac{\pi}{2} - \frac{2\ln(a)}{(a^2-1)a} K \end{aligned}$$

où on a noté  $K = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(y)}{1+y^2} dy$ .

Le changement de variable  $x = 1/y$  dans cette dernière intégrale, donne  $K = -K$  et donc  $K = 0$ .

Finalement

$$J(a) = \frac{1}{a(a+1)} I - \frac{\ln^2(a)}{(a^2-1)a} \frac{\pi}{2}.$$

On montre que  $J$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $a \mapsto \frac{\ln^2(x)}{(1+x^2)(x^2+a^2)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{(1+x^2)(x^2+a^2)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Soit  $[b, c] \subset \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $a \in [b, c]$

$$\left| \frac{\ln^2(x)}{(1+x^2)(x^2+a^2)} \right| \leq \frac{\ln^2(x)}{(1+x^2)(x^2+b^2)}.$$

Or  $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{(1+x^2)(x^2+b^2)}$  est bien intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (vu en préambule).

$J$  est bien continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

L'expression trouvée précédemment pour  $J(a)$ , avec  $a \neq 1$  permet de trouver  $J(1)$  comme la limite de  $J(a)$  lorsque  $a$  tend vers 1.

Comme  $\ln(a) \underset{a \rightarrow 1, a \neq 1}{\sim} (a-1)$ ,  $\frac{\ln^2(a)}{(a^2-1)a} \underset{a \rightarrow 1, a \neq 1}{\sim} \frac{a-1}{2}$  et donc ce terme tend vers 0 lorsque  $a$  tend vers 1.

Finalement  $J(a) \xrightarrow{a \rightarrow 1, a \neq 1} \frac{1}{2}I$  et

$$J(1) = \frac{1}{2}I.$$

### Exercice 8

Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad |f(a) - f(b)| = |a - b|$$

et  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

### Solution 8

Soit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$ . On a

$$|f(a) - 0| = |a - 0| \quad \text{et} \quad |f(a) - 1| = |a - 1|.$$

Si on note  $\mathcal{C}$  le cercle de centre 0 et de rayon  $|a|$  et  $\mathcal{C}'$  le cercle de centre 1 et de rayon  $|a-1|$ ,  $a$  et  $f(a)$  sont à l'intersection de ces deux cercles.

Si  $a$  est réel, ces deux cercles sont tangents et leur intersection est réduite  $\{a\}$ .

Si  $a$  est complexe non réel, l'intersection de ces deux cercles est  $\{a, \bar{a}\}$ .

On a donc  $f(a) = a$  ou  $f(a) = \bar{a}$ .

Supposons qu'il existe  $a$  et  $b$  complexes non réels, tels que  $f(a) = a$  et  $f(b) = \bar{b}$ , alors, en écrivant  $a = \alpha + i\beta$  et  $b = \gamma + i\delta$ , avec  $\beta \neq 0$  et  $\delta \neq 0$ , on a

$$0 = |a - b|^2 - |f(a) - f(b)|^2 = 4\beta\delta.$$

On a donc une contradiction.

Finalement, ou bien  $f(a) = a$  pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , ou bien  $f(a) = \bar{a}$  pour tout  $a \in \mathbb{C}$ .

Réciproquement, l'identité et la conjugaison conviennent. Ce sont donc les seules.

### Exercice 9

Montrer que l'intégrale suivante converge et donner sa valeur :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}} dx.$$

Pour le calcul, on pourra factoriser par  $x^2$  puis faire le changement de variable  $u = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1}}$ .

**Solution 9**

$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$  est continue sur  $]0, 1[$ .

Elle est équivalente en 0 à  $x \mapsto \frac{1}{x^{2/3}}$ . Elle est donc intégrable sur  $]0, 1/2]$  par comparaison à une fonction de référence.

Elle est équivalente en 1 à  $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{1/3}}$ . On conclut de la même manière.

Pour ce qui est du calcul, on suit les indications :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}} \frac{1}{x} dx.$$

Puis

$$I = \int_0^{+\infty} u \left(1 + \frac{1}{u^3}\right) \frac{3/u^4}{\left(1 + \frac{1}{u^3}\right)^2} du = 3 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^3} du.$$

Il reste à trouver une primitive d'une fonction rationnelle : on décompose en éléments simples.

$$\frac{1}{1 + X^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + X} + \frac{1}{3} \frac{2 - X}{X^2 - X + 1}.$$

Pour  $U \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\begin{aligned} 3 \int_0^U \frac{1}{1 + u^3} du &= \int_0^U \frac{1}{1 + u} du - \frac{1}{2} \int_0^U \frac{2u - 1 - 3}{u^2 - u + 1} du \\ &= \ln(1 + U) - \frac{1}{2} \ln(U^2 - U + 1) + \frac{3}{2} \int_0^U \frac{1}{u^2 - u + 1} du \\ &= \ln\left(\frac{1 + U}{\sqrt{U^2 - U + 1}}\right) + \frac{3}{2} \int_0^U \frac{1}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} du \\ &= \ln\left(\frac{1 + U}{\sqrt{U^2 - U + 1}}\right) + 2 \int_0^U \frac{1}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} du \\ &= \ln\left(\frac{1 + U}{\sqrt{U^2 - U + 1}}\right) + \sqrt{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{(2U-1)/\sqrt{3}} \frac{1}{1 + v^2} dv \\ &= \ln\left(\frac{1 + U}{\sqrt{U^2 - U + 1}}\right) + \sqrt{3} \left( \operatorname{Arctan}\left(\frac{2U-1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \end{aligned}$$

On peut alors passer à la limite lorsque  $U$  tend vers  $+\infty$ . On trouve

$$I = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

**Exercice 10**

Montrer que la matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  où pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$ , est une matrice symétrique définie positive.

On pourra voir  $\frac{1}{i+j}$  comme une intégrale.

**Solution 10**

$A$  est clairement symétrique.



Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} X^T A X &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{i+j} x_i x_j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_0^1 t^{i+j-1} dt x_i x_j \\ &= \int_0^1 \sum_{1 \leq i, j \leq n} t^{i-\frac{1}{2}} x_i t^{j-\frac{1}{2}} x_j dt \\ &= \int_0^1 f(t)^2 dt \end{aligned}$$

où  $f : t \mapsto \sqrt{t} \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$ .

Par positivité de l'intégrale,  $X^T A X \geq 0$ .

Supposons que  $X^T A X = 0$ . Alors,  $f^2$  étant continue positive, elle est identiquement nulle. Alors, le polynôme  $\sum_{i=1}^n x_i X^{i-1}$  s'annule sur  $]0, 1]$ , donc c'est le polynôme nul, ses coefficients, i.e. les  $x_i$ , sont tous nuls :  $X = 0$ .

On a bien montré que  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

### Exercice 11

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $T_n$  à coefficients entiers, de degré  $n$ , tel que

$$T_n \left( X + \frac{1}{X} \right) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$

2. Soit  $a \in \mathbb{Q}$  tel que  $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$ . Montrer que  $2 \cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$ .

### Solution 11

1. Procédons par analyse synthèse. Supposons donc qu'une telle suite de polynômes existe. On remarque que pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left( X + \frac{1}{X} \right) \left( X^n + \frac{1}{X^n} \right) = \left( X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}} \right) + \left( X^{n-1} + \frac{1}{X^{n-1}} \right).$$

On a donc,

$$T_{n+1} \left( X + \frac{1}{X} \right) = \left( X + \frac{1}{X} \right) T_n \left( X + \frac{1}{X} \right) - T_{n-1} \left( X + \frac{1}{X} \right).$$

Posons  $U_n = T_{n+1} - X T_n + T_{n-1}$ .  $U_n \circ \left( X + \frac{1}{X} \right) = 0$ . Comme  $x \mapsto x + \frac{1}{x}$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $[2, +\infty[$ ,  $U_n$  s'annule au moins sur tout  $[2, +\infty[$  et donc est le polynôme nul :

$$T_{n+1} = X T_n - T_{n-1}.$$

Le même argument permet de dire que  $T_0 = 2$  et  $T_1 = X$ .

Passons à la synthèse. On pose  $T_0 = 2$ ,  $T_1 = X$  et pour  $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+2} = X T_{n+1} - T_n.$$

On vérifie par récurrence que cette suite satisfait, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_n \left( X + \frac{1}{X} \right) = X^n + \frac{1}{X^n}.$$

La partie analyse a montré que cette suite est unique.

On montre par récurrence que chaque  $T_n$  est de degré  $n$  et à coefficients entiers.

2.  $a$  étant rationnel, on peut choisir  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $na \in 2\mathbb{Z}$ . Alors

$$T_n(2 \cos(a\pi)) = T_n(e^{ia\pi} + e^{-ia\pi}) = e^{ian\pi} + e^{-ian\pi} = 2.$$

On montre par récurrence que le coefficient dominant de  $T_n$  est 1 et son coefficient constant est 0 si  $n$  est impair et  $(-1)^{n/2}2$  si  $n$  est pair. Quitte à quadrupler le  $n$  choisi, on peut supposer  $n$  multiple de 4.

On écrit  $\cos(a\pi) = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $p$  et  $q$  premiers entre eux.

On note  $T_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , avec tous les  $a_k$  dans  $\mathbb{Z}$  (et  $a_n = 1$  et  $a_0 = 2$ ).

On évalue en  $2 \cos(a\pi) = \frac{2p}{q}$ , il vient :

$$2 + a_1 2 \frac{p}{q} + \dots + a_{n-1} 2^{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + 2^n \frac{p^n}{q^n} = 2.$$

On simplifie par 2 (additivement) et on multiplie par  $q^n$ , il reste :

$$a_1 2q^{n-1}p + \dots + a_{n-1} 2^{n-1} q p^{n-1} + 2^n p^n = 0.$$

$q$  divise tous les premiers termes, donc il doit diviser le dernier. Comme il est premier avec  $p$ ,  $q$  divise  $2^n$ .  $q$  est donc une puissance de 2. On écrit  $q = 2^m$ , avec  $m \in \mathbb{N}$ . Il vient

$$a_1 p 2^{nm-m+1} + \dots + a_{n-1} p^{n-1} 2^{m+n-1} + p^n 2^n = 0.$$

Si  $m = 0$ , c'est fini. Sinon, pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $n-1-k \leq m(n-1-k)$  et donc  $m+n-1 \leq k+m(n-k) : 2^{m+n-1}$  divise tous les premiers termes, donc divise le dernier. Il vient :  $m+n-1 \leq n$  et donc  $m-1 \leq 0$  : il reste  $m = 1$ , i.e.  $q = 2$  : on a bien le résultat voulu.

### Exercice 12

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable et minorée. On note  $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ .

1. On suppose que  $m$  n'est pas atteinte. Montrer qu'il existe  $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(x_n) \leq m + \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad x_{n+1} \notin [x_n - 1, x_n + 1].$$

2. En déduire, dans tous les cas, l'existence de  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$f'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On suppose maintenant que  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  et qu'elle est minorée. On note  $m = \inf_{x \in \mathbb{R}^p} f(x)$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ .

3. On pose  $g : x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x\|_2$ . Montrer que  $g$  est minorée et que sa borne inférieure est atteinte.

4. Montrer qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $\|\nabla f(x)\| \leq \varepsilon$ .

5. En déduire un résultat analogue à 2.

### Solution 12

1. On construit  $(x_n)$  par récurrence.

Comme  $m + \frac{1}{2^0} > m$ , il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) \leq m + \frac{1}{2^0}$ .

On suppose  $x_0, \dots, x_n$  construits tels que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(x_k) \leq m + \frac{1}{2^k}$  et pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $x_{k+1} \notin [x_k - 1, x_k + 1]$ .

$m + \frac{1}{2^{n+1}} > m$  : il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $f(y) \leq m + \frac{1}{2^{n+1}}$ . Supposons que tous les  $y$  vérifiant cela sont dans  $[x_n - 1, x_n + 1]$ . Alors, on peut construire une suite  $(y_p) \in [x_n - 1, x_n + 1]^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(y_p) \leq m + \frac{1}{2^{n+1+p}}$ . Cette suite étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente. On la note  $(y_{\varphi(p)})$ . On note  $\ell$  sa limite. Comme pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(y_{\varphi(p)}) \leq m + \frac{1}{2^{n+1+\varphi(p)}}$  et comme  $f$  est continue, on peut passer à la limite dans cette inégalité et on obtient  $f(\ell) \leq m$ . Mais comme on a toujours  $f(\ell) \geq m$ , finalement  $f(\ell) = m$  :  $m$  est atteinte. On a une contradiction. Il existe donc  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $f(y) \leq m + \frac{1}{2^{n+1}}$  et  $y \notin [x_n - 1, x_n + 1]$ . On note  $x_{n+1}$  un tel  $y$  et on a réussi la construction de la suite voulue.

2. Si  $m$  est atteinte en  $x_0 \in \mathbb{R}$ , par le théorème de l'extremum local,  $f'(x_0) = 0$  et on pose  $u_n = x_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Sinon, on est dans le cas de la première question. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|f(x_n) - f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{2^n}$  et  $|x_n - x_{n+1}| \geq 1$ . Donc

$$\left| \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Mais le théorème des accroissements finis assure l'existence de  $u_n$  entre  $x_n$  et  $x_{n+1}$  tel que

$$f'(u_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}.$$

On en déduit qu'il existe une suite  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$|f'(u_n)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On a bien

$$f'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3.  $g$  est bien continue sur  $\mathbb{R}^p$  et elle est clairement minorée par  $m$ . On note  $M = \inf_{x \in \mathbb{R}^p} g(x)$ .  $M \geq m$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $g(x) \geq m + \varepsilon \|x\|_2$ . Par minoration,  $g(x) \xrightarrow{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} +\infty$ . Il existe donc  $A \in \mathbb{R}_+^*$

tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^p \setminus B'(0, A)$ ,  $g(x) \geq g(0)$ .

Or  $B'(0, A)$  est un compact (fermé borné de  $\mathbb{R}^p$  de dimension finie). Par le théorème des bornes atteintes, il existe  $x_0 \in B'(0, A)$  tel que  $g(x_0)$  soit le minimum de  $g$  sur  $B'(0, A)$ . Comme  $g(x_0) \leq g(0)$ ,  $g(x_0)$  est bien un minimum global :  $M$  est atteinte.

4.  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ , ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .

Si  $g$  atteint son minimum en  $x_0 \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ , alors  $\nabla g(x_0) = 0$ . Or

$$\nabla g(x_0) = \nabla f(x_0) + \varepsilon \frac{1}{\|x_0\|_2} x_0$$

et donc

$$\|\nabla f(x_0)\|_2 = \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Supposons maintenant que  $g$  atteigne son minimum en 0.

Ou bien  $\nabla f(0) = 0$  et alors,  $\|\nabla f(0)\|_2 \leq \varepsilon$ .

Ou bien  $\nabla f(0) \neq 0$  : on pose  $e = \frac{1}{\|\nabla f(0)\|_2} \nabla f(0)$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(te) + \varepsilon|t| - f(0) \geq 0$  et pour  $t$  au voisinage de 0

$$t\nabla f(0).e + \varepsilon|t| + o(t) \geq 0.$$

Pour  $t > 0$ ,

$$\nabla f(0).e + \varepsilon + o(1) \geq 0$$

et en passant à la limite lorsque  $t$  tend vers  $0^+$ , on obtient

$$\nabla f(0).e \geq -\varepsilon.$$

De même, pour  $t < 0$ ,

$$\nabla f(0).e - \varepsilon + o(1) \leq 0$$

et en passant à la limite lorsque  $t$  tend vers  $0^-$ , on obtient

$$\nabla f(0).e \leq \varepsilon.$$

Finalement,  $|\nabla f(0).e| \leq \varepsilon$ , i.e.

$$\|\nabla f(0)\|_2 \leq \varepsilon.$$

5. En choisissant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ , la question précédente assure l'existence de  $u_n \in \mathbb{R}^p$  tel que  $\|\nabla f(u_n)\|_2 \leq \frac{1}{2^n}$  et donc

$$\|\nabla f(u_n)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

### Exercice 13

Soit  $m$  un message aléatoire constitué de 0 et de 1, les deux lettres étant équiprobables. On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de séries de 1 dans  $m$ . Par exemple si  $m = 011010$ ,  $X = 2$ .

1. Donner la loi de  $X$ .
2. Quelle est l'espérance de  $X$  ?

### Solution 13

1. On note  $n$  la longueur du message. On a  $2^n$  messages possibles équiprobables. On procède par dénombrement : on compte les cas favorables.

( $X = p$ ) contient les messages ayant  $p$  séries de 1. On distingue 4 cas.

Ou bien le message commence par une série de 0 et termine par une série de 0. On a donc  $p + 1$  séries de 0 et  $p$  séries de 1 intercalées. On note  $z_i$  la longueur des séries successives de 0 et  $u_i$  celles de 1. On a

$$z_1 + u_1 + \cdots + z_p + u_p + z_{p+1} = n.$$

Il s'agit donc de découper  $n$  en  $2p + 1$  blocs. Cela revient encore à chercher les applications strictement croissantes de  $[[1, 2p+1]]$  dans  $[[1, n]]$  qui envoient 1 sur 1. On a donc  $\binom{n-1}{2p}$  possibilités.

Ou bien le message commence par une série de 1 et termine par une série de 1. On découpe alors  $n$  en  $2p - 1$  blocs. On a  $\binom{n-1}{2p-2}$  possibilités.

Ou bien le message commence par une série de 1 et termine par une série de 0. On découpe

alors  $n$  en  $2p$  blocs. On a  $\binom{n-1}{2p-1}$  possibilités.

Le dernier cas est le symétrique de l'avant dernier. On a donc

$$\binom{n-1}{2p} + \binom{n-1}{2p-2} + \binom{n-1}{2p-1} + \binom{n-1}{2p-1}$$

cas favorables, i.e. avec le triangle de Pascal,  $\binom{n+1}{2p}$ . Finalement

$$\mathbb{P}(X = p) = \frac{1}{2^n} \binom{n+1}{2p}.$$

### Autre version

On peut mettre des délimiteurs entre chaque paquet de 0 ou de 1 : il faut donc choisir la place de ces  $2p$  délimiteurs parmi les  $n+1$  places entre chaque lettre du message. Le nombre de cas favorables est donc  $\binom{n+1}{2p}$ . On retrouve

$$\mathbb{P}(X = p) = \frac{1}{2^n} \binom{n+1}{2p}.$$

2.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1 \leq p, 2p-1 \leq n} p \frac{1}{2^n} \binom{n+1}{2p}.$$

On réécrit

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{1 \leq p, 2p-1 \leq n} 2p \binom{n+1}{2p}$$

et avec la formule du capitaine

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{1 \leq p, 2p-1 \leq n} (n+1) \binom{n}{2p-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{1 \leq p, 2p-1 \leq n} \binom{n}{2p-1}.$$

On calcule la dernière somme (son double) en développant avec la formule du binôme  $(1+1)^n - (-1+1)^n$ . On trouve donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{4}.$$

### Exercice 14

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , continue telle qu'il existe  $k \in [0, 1[$  pour lequel :  $\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} k$ .

1. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Peut-on généraliser ?

### Solution 14

1. On choisit  $\ell \in ]k, 1[$ . Il existe  $A \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \geq A$ , alors  $\frac{f(x+1)}{f(x)} \leq \ell$ , ou encore  $f(x+1) \leq \ell f(x)$ .  
Soit  $x \geq A$ . On pose  $N = \lfloor x - A \rfloor$ . Alors, par relation de Chasles et positivité de  $f$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{A+k}^{A+k+1} f(t) dt + \int_{A+N}^x f(t) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^N \int_{A+k}^{A+k+1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Par changements de variable ( $u = t - k$ ) et croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^N \int_A^{A+1} \ell^k f(u) du \\ &\leq \left( \sum_{k=0}^N \ell^k \right) \int_A^{A+1} f(u) du \\ &\leq \frac{1}{1-\ell} \int_A^{A+1} f(u) du. \end{aligned}$$

Les intégrales partielles sont majorées alors que  $f$  est positive : on a bien montré que  $f$  est intégrable sur  $[A, +\infty[$  et donc sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Si on suppose qu'il existe  $T \in \mathbb{R}_+^*$  et  $k \in [0, 1[$  pour lequel :  $\frac{f(x+T)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} k$ , on peut montrer de la même manière que  $f$  est intégrable.

### Exercice 15

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  avec  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. Montrer que l'on a bien affaire à une distribution de probabilités discrète.
2. Donner la fonction génératrice de  $X$ . Quel est son rayon de convergence ?
3.  $X$  admet-elle une espérance. Si oui, la calculer.

### Solution 15

1. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(X = k) \geq 0$  et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

On a reconnu la dérivée de la somme de la série entière géométrique évaluée en  $\frac{1}{2}$ .

2. Pour  $t \in [-1, 1]$ ,

$$G_x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \left(\frac{t}{2}\right)^k.$$

On remarque ici que le rayon de convergence est 2. On a alors, pour  $t \in ]-2, 2[$  :

$$G_X(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{t}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{t}{2-t}\right)^2.$$

3. Comme  $R > 1$ ,  $G_X$  est dérivable en 1 et  $X$  possède une espérance finie.

De plus,  $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ . Or, pour tout  $t \in ]-2, 2[$ ,  $G'_X(t) = \frac{4t}{(2-t)^3}$ , donc  $\mathbb{E}(X) = 4$ .

On peut le retrouver par un calcul classique qui fait intervenir la dérivée deuxième de la somme de la série entière géométrique.

**Exercice 16**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $\mathbb{C}^n$ . Soit  $a$  un complexe non nul. On suppose :

$$f \circ g - g \circ f = af.$$

$f$  est-il inversible ?

Indication : on pourra montrer que pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^k \circ g - g \circ f^k = akf^k$ .

**Solution 16**

On montre par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  :

$$(H_k) \quad f^k \circ g - g \circ f^k = akf^k.$$

$(H_0)$  est immédiatement vraie.

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(H_k)$  soit vraie. Montrons  $(H_{k+1})$ .

On compose par  $f$  à gauche dans  $(H_k)$ . On obtient

$$f^{k+1} \circ g - f \circ g \circ f^k = akf^{k+1}. \quad (1)$$

On compose par  $f^k$  à droite dans  $f \circ g - g \circ f = af$ . On obtient

$$f \circ g \circ f^k - g \circ f^{k+1} = af^{k+1}. \quad (2)$$

(1) + (2) donne  $(H_{k+1})$ .

On définit  $T_g : h \mapsto h \circ g - g \circ h$ .  $T_g$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  qui est de dimension finie. Si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^k \neq 0$ , comme  $T_g(f^k) = akf^k$ ,  $ak$  serait valeur propre de  $T_g$  et donc  $T_g$  aurait une infinité de valeurs propres : ce n'est pas possible. Il existe donc  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f^k = 0$  :  $f$  est nilpotent et donc n'est pas inversible.

**Exercice 17**

Soit  $(A_1, \dots, A_p) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^p$ . On note  $A = A_1 + \dots + A_p$  et on suppose que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ , si  $i \neq j$  alors  $A_i^T A_j = 0$ .

1. On suppose que  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\sum_{i=1}^p \text{rg}(A_i) = n$ .
2. On suppose que  $\sum_{i=1}^p \text{rg}(A_i) = n$  et que pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\text{Im}(A_j)$  est stable par  $A_j^T$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Solution 17**

1. L'image de  $A_1 + \dots + A_n$  est incluse dans la somme des images et la somme des images a une dimension inférieure ou égale à la somme des dimensions. Le rang de  $A_1 + \dots + A_n$  étant  $n$ , la somme des dimensions des images est supérieure ou égale à  $n$  ou encore,  $\text{rg}(A_1) + \dots + \text{rg}(A_p) \geq n$ .

Mais les images des  $A_i$  sont deux à deux orthogonales, en effet, pour  $i \neq j$ , pour  $Y_i$  et  $Y_j$  respectivement dans les images de  $A_i$  et  $A_j$ , il existe  $X_i$  et  $X_j$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que  $Y_i = A_i X_i$  et  $Y_j = A_j X_j$ . Mais alors  ${}^t Y_i Y_j = {}^t X_i {}^t A_i A_j X_j = 0$ . Donc les images sont en somme directe et la dimension de leur somme est la somme des dimensions et cette somme est inférieure ou égale à  $n$ . On a donc aussi  $\text{rg}(A_1) + \dots + \text{rg}(A_p) \leq n$  et finalement,  $\text{rg}(A_1) + \dots + \text{rg}(A_p) = n$ .

2. Avec ce qui précède et l'égalité  $\text{rg}(A_1) + \dots + \text{rg}(A_p) = n$ , on peut écrire

$$\text{Im}(A_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(A_p) = \mathbb{R}^n.$$

De plus,  $A$  est inversible si et seulement si  $A^T$  est inversible. On s'intéresse donc au noyau de  $A^T$ .

Soit  $X \in \mathbb{R}^n$ . On décompose  $X = \sum_{i=1}^p X_i$ , avec chaque  $X_i$  dans  $\text{Im}(A_i)$ . On a donc, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'existence de  $Y_i$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $X_i = A_i Y_i$ .

$$A^T X = \sum_{i=1}^p A^T X_i = \sum_{i=1}^p A^T A_i Y_i = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^p A_j^T \right) A_i Y_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p A_j^T A_i Y_i = \sum_{i=1}^p A_i^T A_i Y_i = \sum_{i=1}^p A_i^T X_i.$$

Mais chaque  $A_i^T X_i$  est dans l'image de  $A_i$ , par stabilité de cette image par  $A_i^T$ . La somme des images étant directe,

$$A^T X = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_i^T X_i = 0.$$

Donc

$$(A^T X = 0 \implies X = 0) \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (A_i^T X_i = 0 \implies X_i = 0).$$

$A^T$  est inversible si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'endomorphisme induit par  $A_i^T$  sur l'image de  $A_i$  est inversible.

### Exercice 18

Soit  $(a_n)$  la suite réelle telle que  $a_0 = a_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + 2\frac{a_n}{n+2}$ .

1. Trouver le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ .
2. Calculer la somme  $f$  de cette série entière.
3. Expliciter les  $a_n$ .

### Solution 18

1. Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  :

$$(H_n) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad 1 \leq a_p \leq p^2.$$

$n = 2$  : pour  $p = 1$ ,  $1 \leq a_1 = 1 \leq 1^2$  et pour  $p = 2$ , la définition de la suite  $(a_n)$  donne  $a_2 = 3$  et on a bien  $1 \leq a_2 = 3 \leq 2^2 = 4$ . Donc  $H_2$  est bien vérifiée.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  tel que  $H_n$  soit vraie. Montrons  $H_{n+1}$ .

Soit  $p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Si  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on conclut avec  $H_n$ . On suppose donc que  $p = n+1$ . On a  $a_{n+1} = a_n + 2\frac{a_n}{n+1}$ . Or par  $(H_n)$ ,  $1 \leq a_n \leq n^2$  et  $1 \leq a_{n-1} \leq (n-1)^2$  et donc  $1 + \frac{2}{n+1} \leq a_{n+1} \leq n^2 + 2\frac{(n-1)^2}{n+1}$ . Or on a bien,  $1 \leq 1 + \frac{2}{n+1}$  et  $n^2 + 2\frac{(n-1)^2}{n+1} \leq (n+1)^2$ . Pour la dernière inégalité, elle est équivalente à  $n^2(n+1) + 2(n-1)^2 \leq (n+1)^3$ , ou encore  $n^3 + 3n^2 - 4n + 2 \leq n^3 + 3n^2 + 3n + 1$  ou encore  $1 \leq 7n$  et cette dernière inégalité est clairement vraie.

$(H_{n+1})$  est donc vraie et le principe de récurrence donne  $(H_n)$  vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

La série entière  $\sum x^n$  a pour rayon de convergence 1, donc la partie gauche de l'inégalité précédente donne  $R \leq 1$ . La série entière  $\sum n^2 x^n$  a aussi pour rayon de convergence 1 car la multiplication par  $n$  du terme général ne change pas le rayon de convergence d'une série entière. La partie droite de l'inégalité précédente donne  $R \geq 1$  et donc finalement,  $R = 1$ .



2. Montrons que  $f$  est solution sur  $] - 1, 1[$  de l'équation différentielle  $(1 - x)y' - (2x + 1)y = 0$ .

Soit  $x \in ] - 1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ . On a alors

$$\begin{aligned} (1-x)f'(x) - (2x+1)f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1) a_{n+1} - (n+1) a_n - 2 a_{n-1}] x^n + a_1 - a_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On résout cette équation.

Pour  $x \in ] - 1, 1[$ ,  $\frac{2x+1}{1-x} = \frac{2(x-1)+3}{1-x} = -2 + \frac{3}{1-x}$  et donc une primitive de  $x \mapsto \frac{2x+1}{1-x}$  sur  $] - 1, 1[$ , est  $x \mapsto -2x - 3 \ln(1-x)$ , et donc l'ensemble des solutions est  $\{x \mapsto \lambda e^{-2x-3 \ln(1-x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in ] - 1, 1[$ ,  $f(x) = \lambda \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ , or  $f(0) = 1$ , d'où  $\lambda = 1$ , et pour tout  $x \in ] - 1, 1[$ ,  $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ .

3.  $f$  est développable en série entière par produit de Cauchy. On explicite ce développement en série entière pour conclure par unicité d'un tel développement.

Pour le deuxième facteur, on reconnaît la dérivée seconde de la somme de la série géométrique de raison  $x$ .

Soit  $x \in ] - 1, 1[$ . Pour

$$f(x) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n \right).$$

Il vient donc, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{2}.$$