MINES PONTS

Planche 1
Calculer
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pourra remarquer que
$$\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\, dt.$$

Solution 1
On a
$$\frac{\sin(kx)}{k} = \int_0^1 \mathrm{Im}\left((te^{ix})^{k-1} e^{ix}\right)\, dt$$
Posons $f_k : t \mapsto \mathrm{Im}((te^{ix})^{k-1}e^{ix})$ où on a fixé un réel x. (f_k) est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ et
$$\forall t \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right) = \frac{\sin(x)}{1-2t\cos(x)+t^2}$$
$\sum(f_k)$ converge donc simplement sur $[0,1[$ vers une fonction continue. En outre,
$$\forall t \in [0,1[,\ \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right| = \frac{|1-(te^{ix})^n|}{|1-te^{ix}|} \leq \frac{2}{|1-te^{ix}|} = \frac{1}{\sqrt{1-2t\cos(x)+t^2}}$$
Si $x \neq 0[2\pi]$, le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$ (le terme sous la racine vaut $(t-e^{ix})(t-e^{-ix})$) et le majorant est continu et donc intégrable sur $[0,1]$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{1-2t\cos(x)+t^2}\, dt$$
Si $x \neq 0[\pi]$, en écrivant que $1-2t\cos(x)+t^2 = (t-\cos(x))^2+\sin^2(x)$ et puisque $\sin^2(x) \neq 0$, on sait calculer l'intégrale (primitive $\arctan\left(\frac{t-\cos(x)}{\sin(x)}\right)$) et on obtient
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \arctan\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$$
que l'on pourrait simplifier avec $\arctan(u)+\arctan(1/u) = \pi/2$ pour $u>0$.
Si $x = 0[2\pi]$, la somme est nulle.
Si $x = \pi[2\pi]$, elle vaut $-\ln(2)$.

Planche 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose
$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice B soit diagonalisable.

Solution 2
Une récurrence simple montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1}A^k & 2^{k-1}A^k \\ 2^{k-1}A^k & 2^{k-1}A^k \end{pmatrix}$$

On en déduit par combinaisons linéaires que

$$\forall P \in X\mathbb{R}[X],\ P(B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P(2A) & P(2A) \\ P(2A) & P(2A) \end{pmatrix}$$

Si A est diagonalisable alors le polynôme minimal μ_A de A est scindé à racines simples. Quitte à considérer $X\mu_A$ si 0 n'est pas valeur propre de A, on trouve donc un polynôme $P \in X\mathbb{R}[X]$ scindé simple qui annule A. Ainsi, $P(X/2)$ annule B. Et comme il est aussi scindé simple, B est diagonalisable.
La réciproque est similaire. On trouve $P \in X\mathbb{R}[X]$ qui annule B et on considère $P(2X)$ qui annule A...

Planche 3
Donner un équivalent de

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$$

Solution 3
Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$. On a alors

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = \frac{S_n}{n} - S_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)}$$

$\frac{S_k}{k(k+1)} = o\left(\frac{2^k}{k}\right)$ et la somme du membre de droite est négligeable devant a_n par théorème de sommation des relations de comparaison des séries divergentes positives. Comme S_0 est aussi ngégligeable (puisque $a_n \to +\infty$, somme partielle d'une série positive divergente), on en déduit que

$$a_n \sim \frac{S_n}{n} \sim \frac{2^{n+1}}{n}$$

Planche 4
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F un sous-espace vectoriel de E et $n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente. On suppose que F est stable par n et que $E = F + \operatorname{Im}(n)$. Montrer que $F = E$.

Solution 4
Il suffit, pour conclure, de montrer que $\operatorname{Im}(n) \subset F$. Supposons, par l'absurde, que ce ne soit pas le cas. Montrons par récurrence que pour tout entier k, il existe x_k tel que $n^k(x_k) \notin F$.

- L'hypothèse $\operatorname{Im}(n) \not\subset F$ donne l'existence de x_1.
- Supposons avoir l'existence de x_k pour un $k \geq 1$ donné. $n^k(x_k) \notin F$ et comme F est stable par n, $x_k \notin F$. Or $F + \operatorname{Im}(n) = E$ et il existe donc $y \in F$ et $x_{k+1} \in E$ tels que $x_k = y + n(x_{k+1})$. Par stabilité de F par n, $n^k(y) \in F$ et comme $n^k(x_k) \notin F$, on a aussi $n^{k+1}(x_{k+1}) \notin F$.

Or, n est nilpotent et il existe p tel que $n^p = 0$. Ainsi $0 = n^p(x_p) \notin F$ ce qui contredit le fait que F est un sous-espace.

Planche 5
Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E. On pose $H = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, $F = H^{\perp} \cap \mathrm{Im}(p)$ et $G = H^{\perp} \cap \mathrm{Im}(q)$. Montrer que p et q commutent si et seulement si F et G sont orthogonaux.

Solution 5
p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ de direction $\mathrm{Im}(p)^{\perp}$. De même pour q. On rappelle aussi que parmi les projections, celles qui sont orthogonales sont celles qui contractent les distances (c'est donc le cas de p et q).

- On suppose que p et q commutent. $p \circ q$ est alors un projecteur ($(pq)^2 = p^2q^2 = pq$) sur $\mathrm{Im}(p \circ q)$ de direction $\ker(p \circ q)$.
  De plus $\|p \circ q(x)\| \leq \|p(x)\| \leq \|x\|$ et $p \circ q$ est donc une projection orthogonale.
  Comme $p \circ q = q \circ p$, $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(q \circ p) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ alors $p \circ q(x) = p(x) = x$ et $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$. On a donc
  $$H = \mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$$
  Finalement, $p \circ q = q \circ p$ est la projection orthogonale sur H.
  Soit $\alpha \in F$; comme $\alpha \in \mathrm{Im}(p)$, $p(\alpha) = \alpha$ et comme $\alpha \in \ker(p \circ q) = H^{\perp}$, $q \circ p(\alpha) = 0$. On a donc $q(\alpha) = 0$ c'est à dire $\alpha \in \mathrm{Im}(q)^{\perp}$; α étant orthogonal à tout élément de $\mathrm{Im}(q)$ est orthogonal à tout élément de G.
  On a montré que F et G sont orthogonaux.

- On suppose, réciproquement, que F et G sont orthogonaux. Remarquons tout d'abord que
  $$F \oplus^{\perp} H = \mathrm{Im}(p) \quad \text{et} \quad G \oplus^{\perp} H = \mathrm{Im}(q)$$
  Les sommes sont clairement orthogonale. Il suffit par ailleurs de montrer la première égalité (l'autre est similaire). L'inclusion directe est immédiate.
  Réciproquement, soit $x \in Im(p)$; il existe $y \in H$ et $z \in H^{\perp}$ tels que $x = y + z$. $z = x - y$ est dans $Im(p)$ et dans $H^{\perp}$ et donc dans F. ceci montre l'inclusion directe.
  Comme on suppose F et G orthogonaux, on a
  $$\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) = F \oplus^{\perp} G \oplus^{\perp} H$$
  Soit $x \in E$. On peut le décomposer en $x = a + b + c + d$ avec $a \in H$, $b \in F$, $c \in G$ et $d \in (\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q))^{\perp}$. On a alors
  $$p(x) = a + b \quad \text{et} \quad q(x) = a + c$$
  et $p \circ q(x) = a = q \circ p(x)$. Ainsi, p et q commutent (et $p \circ q = q \circ p$ est la projection orthogonale sur H).

Planche 6
Existe-t-il une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle de classe C^1 telle que $y'(x) + 2\sqrt{y(x)} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Si oui, quelles sont les solutions ?

Solution 6
Supposons que y soit une solution. Il existe alors x_0 tel que $y(x_0) > 0$ (puisque $y \geq 0$). Comme, par ailleurs, y est décroissante ($y' = -2\sqrt{y} \leq 0$), y ne s'annule pas sur $]-\infty, x_0]$.

Si y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors elle reste > 0. On a $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = -1$ et, en primitivant, il existe c tel que $\forall x,\ \sqrt{y(x)} = c - x$ ce qui contredit la non annulation de y.

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}/\ y(x) = 0\}$ est ainsi non vide. Comme il est minoré (par x_0), il admet une borne inférieure b qui, par continuité de y est un minimum. Par décroissance de y, y est nulle sur $[b, +\infty[$. Par le même calcul que ci-dessus on a $\forall x \leq b,\ y(x) = (b - x)^2$.

Réciproquement pour tout choix de b, l'application définie par

$$\forall x \leq b,\ y(x) = (b - x)^2 \ \text{ et } \ \forall x > b,\ y(x) = 0$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation.

Planche 7
Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum(f_n)$ converge simplement.
2. Montrer que sa somme S est continue. Quelles sont ses variations ? Quelle est sa limite en $+\infty$?
3. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Solution 7

1. Si $x \leq 0$, $\sum(f_n(x))$ diverge grossièrement et si $x > 0$, $f_n(x) = o(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et uniquement sur cet ensemble).
2. (f_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. $\forall a > 0$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = e^{-a\sqrt{n}} = o(1/n^2)$ montre que $\sum(f_n)$ converge normalement sur toute partie du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et a fortiori sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.
Le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions donne
$$f \in C^0(\mathbb{R}^{+*})$$
$f_n(x)$ est décroissante vis-à-vis de x pour tout n et S est donc aussi décroissante.
Comme on a convergence normale au voisinage de $+\infty$ et comme $f_n(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ si $n \geq 1$, on peut applique le théorème de double limite qui donne
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
3. Soit $x > 0$. $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Une comparaison série intégrale donne (commencer par des sommes finies puis passer à la limite en justifiant l'intégrabilité)
$$0 \leq f(x) - e^{-x} \leq \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt.$$
(Pour la minoration, il suffit de dire que la somme est plus grande que son premier terme.)
Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ ($t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ à dérivée ne s'annulant pas) donne
$$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt = 2\int_1^{\infty} ue^{-ux}\, du.$$
Une intégration par partie (omise) permet le calcul de l'intégrale qui vaut $\frac{2e^{-x}}{x^2} + \frac{2e^{-x}}{x}$. Le majorant est négligeable devant e^{-x} et donc
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$$

Planche 8
Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A^2 est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}^-$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A^2 associé à une valeur propre non nulle. Donner le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A et contenant x.

3. Montrer que A est semblable une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -l_1 & & & & & & \\ l_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -l_k & & & \\ & & & l_k & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 8

1. A^2 est symétrique réelle et donc diagonalisable (en base orthonormée). Soit λ une valeur propre de A^2 et X un vecteur propre asocié.

$$\lambda \|X\|^2 = {}^tXA^2X = -{}^t(AX)(AX) = -\|AX\|^2 \leq 0$$

et donc $\lambda \leq 0$. Le spectre de A^2 est donc inclus dans $\mathbb{R}^-$.

2. Si X est propre associé à 0 alors $A^2X = 0$ et donc aussi ${}^tAAX = 0$. Ainsi $\|AX\|^2 = {}^tX{}^tAAX = 0$ et $X \in \ker(A)$. $\mathrm{Vect}(X)$ est alors le plus sous-espace stable par A qui contient X.
Si X est propre associé à $\lambda \neq 0$ alors (X, AX) est libre (si $AX = \mu X$ alors $A^2X = \mu^2 X$ et donc $\lambda = \mu^2 \leq 0$ et donc $\lambda = 0$). $\mathrm{Vect}(X, AX)$ est stable par A et de dimension 2 et c'est le plus petit sous-espace stable par A et contenant X.

3. Commençons par remarquer que si F est stable par A alors $F^\perp$ l'est aussi. En effet, soient $x \in F^\perp$ et $y \in F$, on a
$$(Ax|y) = {}^tx{}^tAy = -{}^txAy = -(x|Ay) = 0$$
car $Ay \in F$ et $x \in F^\perp$ ce qui montre que $Ax \in F^\perp$.

   Procédons alors par récurrence sur n.

   - Si $n = 1$ alors $A = 0$ et le résultat est immédiat. Si $n = 2$, c'est aussi immédiat par définition d'une matrice antisymétrique.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 2$. Avec la question précédente, on trouve un sous-espace F stable de dimension 2 (si A est non nulle, mais si $A = 0$, on conclut immédiatement). Dans une b.o.n. adaptée à $F \oplus^\perp F = \mathbb{R}^n$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice $\mathrm{diag}(A_1, A_2)$ avec A_1, A_2 antisymétriques de tailles 2 et $n-2$ car la nouvelle base est orthonormée (et donc la matrice de changement de base est orthogonale). On peut alors appliquer le résultat aux rangs 2 et $n-2$ pour obtenir des matrices de passage P_1 et P_2. La matrice de passage $\mathrm{diag}(P_1, P_2)$ montre que $\mathrm{diag}(A_1, A_2)$ (et donc aussi A) est semblable à une matrice de la forme voulue.

Planche 9

1. Montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\varphi(\mathcal{S}_n^{++}) = \mathcal{S}_n^{++}$. Donner un exemple d'une telle φ. Montrer que $\varphi(\mathcal{S}_n^+) = \mathcal{S}_n^+$.

Solution 9

1. Soit (A_p) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}_n^+$ et A sa limite. A est symétrique car $\mathcal{S}_n$ est fermé (image réciproque de $\{0\}$ par $M \mapsto M - {}^tM$). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\lim_{p\to+\infty} {}^txA_px = {}^txAx$$
et cette quantité est donc positive. Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+$ et cet ensemble est fermé.
2. $\varphi = \mathrm{Id}$ convient ! On peut aussi considérer $M \mapsto P^{-1}MP$ pour toute matrice orthogonale P (on garde la symétrie et les valeurs propres).
Comme en question 2, on montre qu'une limite d'éléments de $\mathcal{S}_n^{++}$ est dans $\mathcal{S}_n^+$. Réciproquement, si $A \in \mathcal{S}_n^+$ alors A est limite de $A + \frac{1}{2^p}I_n \in \mathcal{S}_n^{++}$. ceci montre que
$$\overline{\mathcal{S}_n^{++}} = \mathcal{S}_n^+$$
Par continuité de φ (linéaire en dimension finie), on conclut aisément que $\varphi(\mathcal{S}_n^+) \subset \mathcal{S}_n^+$.
Par ailleurs, on peut remarquer que φ est nécessairement bijective.
En effet, elle est surjective : si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors pour λ assez grand (plus grand que l'opposé du minimum des valeurs propres de A et strictement positif) $A + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A + \lambda I_n = \varphi(B)$. Mais comme λI_n est aussi dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, de la même manière il existe $C \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda I_n = \varphi(C)$ et finalement, $A = \varphi(B - C)$ avec $B - C \in S_n(\mathbb{R})$.
La surjectivité et le fait que $S_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie suffisent à donner φ bijective.
φ^{-1} est aussi linéaire et vérifie $\varphi^{-1}(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$. On a donc de la même manière $\varphi^{-1}(S_n^+(\mathbb{R})) \subset S_n^+(\mathbb{R})$. Il s'en suit que $S_n^+(\mathbb{R}) \subset \varphi(S_n^+(\mathbb{R}))$. Finalement, $\varphi(\mathcal{S}_n^+) = \mathcal{S}_n^+$.

Planche 10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$. Soit $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Pour $f, g \in E$, on note $(f|g) = \int_a^b fg\omega$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto t^n$. On note (P_n) la suite de E obtenue après l'orthonormalisation de la suite (f_n).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n admet n racines distinctes sur $]a, b[$ qu'on note $x_1, \ldots, x_n$.
2. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b \omega(t)P(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(x_k).$$
3. On suppose qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b \omega(t)P(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \beta_k P(y_k).$$
Montrer que les réels $y_1, \ldots, y_n$ sont les racines de P_n.

Solution 10

1. Notons $x_1, \dots, x_p$ les racines de P_n qui sont dans $]a,b[$ et qui sont de multiplicité $m_1, \dots, m_p$ impaires. Ces racines sont les racines "avec changement de signe" dans $]a,b[$. Ainsi en posant $Q = (x - x_1)\dots(x - x_p)$, le polynôme P_nQ est de signe constant sur $[a,b]$.
   Supposons, par l'absurde, que $p < n$. On a alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$ et donc $(Q|P_n) = 0$. $\omega P_n Q$ est ainsi une fonction positive continue d'intégrale nulle. Elle doit être nulle, ce qui n'est pas le cas (car ω ne s'annule pas et un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines).
   On en déduit que $p = n$ et comme $\deg(P_n) = n$, on a toutes les racines, elles sont toutes dans $]a,b[$ et toutes simples.

2. Soit $(L_1, \dots, L_n)$ la famille de polynômes de Lagrange associée à $x_1, \dots, x_n$: ce sont des polyômes de degré $\leq n-1$ (et même $n-1$) tels que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
   Supposons que les α_k existent. On a alors nécessairement
   $$\int_a^b \omega L_i = \alpha_i$$
   ce qui donne l'unicité si existence.
   Réciproquement, pour ce choix des α_i, on a l'égalité qui est vraie pour $L_1, \dots, L_n$. Elle est aussi vraie pour $P_n, XP_{n-1}, \dots, X^{n-1}P_n$ par choix des x_k et car $(X^k|P_n) = 0$ si $k \leq n-1$ (P_n est orthogonal aux $P_0, \dots, P_{n-1}$ qui engendrent $\mathbb{R}_{n-1}[X]$). Finalement elle est vraie sur
   $$\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_{n-1}, P_n, XP_n, \dots, X^{n-1}P_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus P_n\mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$$

3. Supposons, par l'absurde, que les y_k ne sont pas deux à deux distincts. Quitte à renuméroter, on peut supposer qu'il y a $p < n$ des y_i qui sont distincts et que ce sont $y_1, \dots, y_p$. L'égalité avec $P = (X - y_1)^2 \dots (X - y_p)^2$ (qui est bien de degré $\leq 2n-1$) donne $\int_a^p \omega P = 0$. Or ωP est continue, positive et non nulle et ceci est impossible.

   Ainsi, les y_i sont deux à deux distincts et on peut noter $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. En appliquant l'égalité avec L_i^2 (de degré $\leq 2(n-1)$), on en déduit que $\beta_i > 0$.
   En appliquant l'égalité avec $P_n, XP_n, \dots, X^{n-1}P_n$, on obtient que $(\beta_1 P_n(y_1), \dots, \beta_n P_n(y_n))$ est dans le noyau de la matrice de Vandermonde $V(y_1, \dots, y_n)$ qui est inversible (car les y_i sont distincts). Ce vecteur est donc nul et comme les β_i sont différents de 0, ce sont les $P_n(y_i)$ qui sont nuls. Les y_i sont alors les racines de P_n.
   L'unicité des β_i a été vue en question précédente.

Planche 11

Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on note $d_{n,k}$ le nombre de permutation de $[\![1,n]\!]$ avec k points fixes. On pose

$$f \;:\; x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n,0}}{n!} x^n.$$

1. Montrer que f est définie sur $]-1,1[$ et que $e^x f(x) = 1/(1-x)$.

2. En déduire que
   $$d_{n,0} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3. Soit $n \geq 0$. On prend une permutation de $[\![1,n]\!]$ aléatoirement et on note T_n la variable aléatoire correspondant à son nombre de points fixes. Déterminer la loi de T_n.

Solution 11

1. Il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations et donc $d_{n,0} \leq n!$. Ainsi $0 \leq \frac{d_{n,0}}{n!} \leq 1$ et la série entière associée est au moins de rayon de convergence égal à 1. On peut donc poser
$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n,0}}{n!} x^n$$
exp étant DSE de rayon de convergence infini (et donc ≥ 1) on a (produit de Cauchy)
$$\forall x \in]-1,1[,\ e^x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n \ \text{ avec } \ c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k,0}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k,0}$$
On note B_k l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes. Les B_k forment une partition de l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ et donc
$$n! = \sum_{k=0}^{n} |B_k| = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}$$
Choisir un élément de B_k, c'est choisir les points fixes c'est à dire k éléments et permuter sans point fixe les $n-k$ autres éléments. On a donc $|B_k| = \binom{n}{k} d_{n-k,0}$ (valable si $k=n$ car $B_n = \{\mathrm{Id}\}$ est de cardinal $1 = a_0$). On a ainsi
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k,0}$$
On obtient donc $c_n = 1$ et ainsi
$$\forall x \in]-1,1[,\ e^x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

2. On vient de voir que$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et on peut utiliser à nouveau le résultat sur le produit de séries entières :
$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \ \text{ avec } \ d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
Par unicité des DSE, on a donc
$$d_{n,0} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3. On a bien sûr $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
Il y a $n!$ permutations et $d_{n,0}$ d'entre elles mènent à l'événement $T_n = 0$. Par équiprobabilité,
$$\mathbb{P}(T_n = 0) = \frac{d_{n,0}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
Plus généralement, on a aussi vu plus haut que $d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k,0}$. Ainsi
$$\mathbb{P}(T_n = k) = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k,0}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Planche 12
Etudier la nature de la série de terme général

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k}\sin(1/\sqrt{k}).$$

Solution 12
On a tout d'abord

$$\sqrt{k}\sin(1/\sqrt{k}) = 1 - \frac{1}{6k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

et donc

$$\ln(\sqrt{k}\sin(1/\sqrt{k})) = -\frac{1}{6k} + w_k \quad \text{avec} \quad w_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

w_k est le terme général d'une série convergente et on note s sa somme.
On montre classiquement l'existence d'une constante γ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
On en déduit que

$$\ln(a_n) = -\frac{1}{6}\ln(n) - \frac{\gamma}{6} + s + o(1)$$

et en composant par l'expontentielle

$$a_n \sim \frac{K}{n^{1/6}} \quad \text{avec} \quad K = \exp(-\gamma/6 + s) > 0$$

Par théorème de comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ diverge.

Planche 13
Résoudre l'équation différentielle

$$4y'' + 4y' + 5y = e^{-x/2}\sin(x).$$

Solution 13
On a une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique en est $4r^2 + 4r + 5 = 0$ dont les solutions sont $-\frac{1}{2} \pm i$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'espace vectoriel engendré par les deux fonctions

$$\varphi_1 \ : \ x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\cos(x) \quad \text{et} \quad \varphi_2 \ : \ x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\sin(x)$$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre égal à $e^{-\frac{x}{2}+ix}$ sous la forme $cxe^{-\frac{x}{2}+ix}$ avec $c \in \mathbb{C}$ puis on en prend la partie imaginaire. On obtient la solution particulière

$$x \mapsto -\frac{x}{8}e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)$$

Planche 14
Soit $M \in O_p(\mathbb{R})$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^k.$$

1. Trouver la limite de la suite (A_nX) si X est un point fixe de M.
2. Montrer que $\mathbb{R}^p = \ker(M - I_p) \oplus^{\perp} \operatorname{Im}(M - I_p)$.
3. Trouver la limite de la suite (A_nX) si $X \in \operatorname{Im}(M - I_p)$.

4. Etudier la suite (A_n).

Solution 14

1. Si $MX = X$ alors $\forall n,\ A_nX = X$ et la suite est convergente de limite X.

2. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M, qui est un automorphisme orthogonal, et $v = u - \mathrm{Id}$ (de matrice $M - I_p$).
   Soient $y = v(x) \in \mathrm{Im}(v)$ et $z \in \ker(v)$. On a (noter que $u(z) = z$ car $v(z) = 0$)
   $$(y|z) = (u(x) - x|z) = (u(x)|z) - (x|z) = (u(x)|u(z)) - (x|z) = (x|z) - (x|z) = 0$$
   Ainsi $\mathrm{Im}(v)$ et $\ker(v)$ sont orthogonaux. Ils sont donc en somme directe. Par théorème du rang et un argument de dimension, ils sont donc supplémentaires. Ils sont finalement supplémentaires orthogonaux. On a donc
   $$\mathbb{R}^p = \ker(M - I_p) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(M - I_p)$$

3. Soit $z = v(a) = u(a) - a \in \mathrm{Im}(v)$.
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u^{k+1}(a) - u^k(a)) = \frac{u^n(a)}{n} - \frac{a}{n}$$
   Comme u conserve la norme, $\|u^n(a)\| = \|a\|$ et le membre de droite est de limite nulle. En revenant aux matrices,
   $$\forall X \in \mathrm{Im}(M - I_p),\ \lim_{n\to+\infty} A_nX = 0$$

4. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On peut donc décomposer $X = Y + Z$ avec $Y \in \ker(M - I_p)$ et $Z \in \mathrm{Im}(M - I_p)$. Les questions précédentes montrent que $A_nX = A_nY + A_nZ$ converge vers Y qui est le projeté orthogonal de X sur $\ker(M - I_p)$.
   Pour chaque vecteur E_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on convergence de A_nE_i qui est la colonne numéro i de A_n et donc convergence de chaque suite coordonnées de A_n. Ainsi, (A_n) converge. Sa limite est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\ker(M - I_p)$.

Planche 15
Etudier la convergence de la série
$$\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{n + 2\sin(n^3)}.$$

Solution 15
On a
$$\frac{(-1)^n}{n + 2\sin(n^3)} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \frac{2\sin(n^3)}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
C'est le terme général d'une série convergente (somme d'une série convergente par règle spéciale et d'une série absolument convergente).

Planche 16
Pour $n \geq 1$, on pose
$$f_n \ :\ x \in [-\pi, \pi] \longmapsto \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$
Etudier les convergences simple et uniforme. Etudier la série
$$\sum_{n\geq 1} \int_0^{(-1)^n/\sqrt{n}} f_n(x)\ dx$$

Solution 16
On a immédiatement convergence simple de (f_n) vers la fonction nulle. De plus, comme $|\sin(u)| \leq |u|$,

$$\|f_n\|_{\infty,[-\pi,\pi]} \leq \frac{\pi}{n} \to 0$$

et la convergence est uniforme sur $[-\pi, \pi]$.
Le calcul donne immédiatement

$$\int_0^{(-1)^n/\sqrt{n}} f_n(x)\, dx = n\left(1 - \cos(\left(\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\right)\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

ce qui est le terme général d'une série convergente par théorème de comparaison pour les séries positives.

Planche 17
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On suppose que P possède n racines distinctes qu'on note $x_1, \ldots, x_n$. Calculer

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}.$$

Solution 17
Quitte à normaliser P (ce qui ne changera rien au résultat final où on considère un quotient), on peut supposer P unitaire et on a alors

$$P = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$$

P' est aussi scindé : $P' = n\prod\limits_{j=1}^{d}(X - y_j)^{m_j}$, avec les y_j distincts des x_i (sinon, les x_i seraient racines multiples de P).
On a alors

$$\frac{P''}{P'} = \sum_{j=1}^{d} \frac{m_j}{X - y_j}$$

et

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \frac{m_j}{x_i - y_j} = \sum_{j=1}^{d}\left(-m_j \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_j - x_i}\right) = \sum_{j=1}^{d}\left(-m_j \frac{P'(y_j)}{P(y_j)}\right) = 0.$$

Planche 18

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda I_n$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda S$.

Solution 18

1. Supposons qu'il existe A antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$. Comme $A^2 = -{}^tAA$,

   $$\forall X,\ \lambda\|X\|^2 = (X|A^2X) = -{}^t(AX)(AX) = -\|AX\|^2 \leq 0$$

   En prenant $X \neq 0$, on en déduit que $\lambda \leq 0$. Par ailleurs, $0 \leq \det(A^2) = \det(A)^2 = \lambda^n$. Ainsi, soit $\lambda = 0$ soit n est pair.
   Réciproquement, si $\lambda = 0$ alors $A = 0$ convient.
   Si $\lambda < 0$ et n est pair alors $A = \operatorname{diag}(\sqrt{-\lambda}J_2, \ldots, \sqrt{-\lambda}J_2)$ avec $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

2. On exclut le cas $\lambda = 0$ pour lequel $A = 0$ convient.
   S étant symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}SP = \operatorname{diag}(d_1 I_{n_1}, \ldots, d_k I_{n_k})$ avec les d_i deux à deux distincts.
   Supposons que l'on puisse trouver A antisymétrique telle que $A^2 = \lambda S$. Comme $\lambda \neq 0$, A et S commutent et les sous-espaces propres pour S sont stables par A. On a alors $P^{-1}AP = A_1$ qui est de la forme $A_1 = \operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_k)$ avec des M_i antisymétriques et telles que $M_i^2 = \lambda d_i I_{n_i}$. On est ramenés au cas précédent. Les d_i non nuls doivent être du signe opposé à λ et les n_i associés doivent être pairs.
   La réciproque ne pose alors pas de problème (en définissant A_1 par blocs et en revenant à A en faisant le changement de base).

Planche 19
Etudier la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}.$$

Solution 19
On note u_n le terme général de la série et S_n la somme partielle d'ordre n de la série. On remarque tout d'abord que

$$v_p = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} u_n = (-1)^p \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{n}$$

Une comparaison série-intégrale donne

$$\int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{dx}{x} \leq |v_p| \leq \int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{dx}{x} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}$$

Or,

$$\int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{dx}{x} = 2 \ln \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Dans le membre de droite de la double inégalité, les deux autres termes sont dominés par $1/p^2$ et ainsi

$$|v_p| = \frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

ou encore

$$v_p = \frac{2(-1)^p}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

et c'est le terme général d'une série convergente (sommes des termes généraux d'une série convergente par règle spéciale et d'une autre absolument convergente).
S_n est entre deux sommes partielles consécutives de $\sum(v_p)$ (en notant T_p la somme partielle d'ordre p de cette série, S_n est entre $T_{\lfloor n \rfloor}$ et $T_{\lfloor n \rfloor + 1}$). Comme $\sum(v_p)$ converge, (S_n) aussi.

Planche 20
On pose

$$\varphi \ : \ x \geq e \longmapsto \frac{x}{\ln x}.$$

Montrer que φ est une bijection. On note ψ sa bijection réciproque. Donner la nature de la série $\sum 1/\psi(n)$.

Solution 20
φ est dérivable sur $[e, +\infty[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

Cette quantité est > 0 sur $]e, +\infty[$ et la fonction φ est strictement croissante sur cet intervalle et aussi sur $[e, +\infty[$ par continuité.
Elle réalise donc une bijection de $[e, +\infty[$ dans $[\varphi(e), \lim_{+\infty} \varphi[= [e, +\infty[$. On note ψ la bijection réciproque.
L'application $1/\psi$ est positive décroissante. Par théorème de comparaison série-intégrale, la série proposée a même nature que l'intégrale de ψ au voisinage de $+\infty$. ψ étant de classe C^1 et bijective de $[4, +\infty[$ dans son image, on peut poser $u = \psi(t)$ pour obtenir

$$\int_4^x \frac{dt}{\psi(t)} = \int_{\psi(4)}^{\psi(x)} \frac{\varphi'(u)}{u}\, du$$

$\frac{\varphi'(u)}{u} = \frac{1}{u\ln(u)} - \frac{1}{u\ln(u)^2)}$ se primitive en $\ln(\ln(u)) + \frac{1}{\ln(u)}$ qui admet une limite infinie en $+\infty$. On n'a donc pas intégrabilité au voisinage de $+\infty$ et la série proposée diverge.

Planche 21
Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0. \tag{E}$$

1. Soit y une solution bornée de (E). Montrer que $y' \to 0$ en $+\infty$.
2. En déduire qu'il existe au moins une solution non bornée.

Solution 21

1. On a $y'(t) = y'(0) + \int_0^t y''(u)\, du = y'(0) - \int_0^t q(u)y(u)\, du$. Comme q est intégrable et y bornée, qy est intégrable et y' admet donc une limite finie ℓ en $+\infty$. Si, par l'absurde, $\ell \neq 0$ alors y' n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ et, étant localement de signe constant, ademt une intégrale de limite infinie en $+\infty$. Comme $y(t) = y(0) + \int_0^t y'(u)\, du$, ceci contredit le caractère borné de y. On a donc montré que
$$\lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0$$
2. Supposons (par l'absurde) que toutes les solutions de (E) soient bornées. Notons (u, v) une base de solutions. Le wronskien associé est $W = uv' - v'u$ et vérifie $W' = 0$. Par ailleurs, la question précédente indique que W est de limite nulle en $+\infty$. W est donc nul et ceci contredit l'indépendance de (u, v). (E) possède donc une solution non bornée.

Planche 22
Pour toute $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$u(f) \;:\; \begin{cases} [0, 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 \min(x, t)f(t)\, dt \end{cases}$$

1. Montrer que l'application u est un endomorphisme.
2. Donner ses valeurs et vecteurs propres.

Solution 22

1. Soit f continue sur $[0,1]$. Remarquons que
$$u(f)(x)=\int_0^x tf(t)\ dt+x\int_x^1 f(t)\ dt$$
$u(f)$ est ainsi continue, en particulier car $x\mapsto\int_0^x f$ et $x\mapsto\int_x^1 f$ sont continues (car f est continue donc continue par morceaux).
La linéarité de u ($u(f_1+kf_2)=u(f_1)+ku(f_2)$) découle de la linéarité du passage à l'intégrale.
u est ainsi un endomorphisme.

2. On peut en fait dire que $x\mapsto\int_0^x tf(t)\ dt$ et $x\mapsto\int_1^x f$ sont des primitives de $t\mapsto f(t)$ et de f sur $[0,1]$ (par théorème fondamental avec f continue). Ainsi, $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$u(f)'(x)=xf(x)-xf(x)+\int_x^1 f(t)\ dt=\int_x^1 f(t)\ dt$$
et donc $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec
$$u(f)''(x)=-f(x)$$
Si $u(f)=0$ alors $u(f)''=0$ et donc u est affine, du type $x\mapsto ax+b$. De plus, avec l'expression de $u(f)'$, $u(f)'(1)=0$ et donc $a=0$. Enfin $u(f)(0)=0$ et donc $b=0$. Finalement, $f=0$ et u est injective et 0 n'est pas valeur propre.
Soit $\lambda\neq 0$ une valeur propre et f un vecteur propre associé. On a alors $u(f)=\lambda f$ et donc $f=\frac{1}{\lambda}u(f)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$. En dérivant deux fois, on obtient
$$\lambda f''=u(f)''=-f$$
On a aussi $0=u(f)(0)=\lambda f(0)$ et donc $f(0)=0$ (car $\lambda\neq 0$) et $0=u(f)'(1)=\lambda f'(1)$ ce qui entraîne de même $f'(1)=0$.
La résolution de l'équation amène à distinguer les cas.
   - Si $\lambda>0$, en posant $\omega=\sqrt{1/\lambda}$, il existe des constantes a,b telles que
   $$\forall x,\ f(x)=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$$
   Comme $f(0)=0$, $a=0$. Puis comme $f'(1)=0$, $b\omega\cos(\omega)=0$. Si $\omega\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, $b=0$ et f est nulle ce qui est exclus pour un vecteur propre. Il faut donc que $\omega\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et le sous-espace propre associé est inclus dans $x\mapsto\sin(\omega x)$.
   - Si $\lambda<0$, en posant $\omega=\sqrt{-1/\lambda}$, il existe des constantes a,b telles que
   $$\forall x,\ f(x)=a\mathrm{ch}(\omega x)+b\mathrm{sh}(\omega x)$$
   Comme $f(0)=0$, $a=0$. Puis comme $f'(1)=0$, $b=0$. f est nulle ce qui est exclus pour un vecteur propre.

A ce niveau, on a
$$\mathrm{Sp}(u)\subset\left\{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2},\ k\in\mathbb{N}\right\}$$
(on peut se limiter à $k\in\mathbb{N}$ car pour $k\in\mathbb{Z}^{-*}$, on retrouve les mêmes valeurs). De plus chaque sous-espace propre est inclus dans une droite vectorielle. La réciproque est une vérification.

Planche 23
Soient $m,n\in\mathbb{N}$ et $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $0<a<b$. Pour $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$, on pose
$$A(\alpha)=\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\sin^m(t)}{t^n}\ dt.$$
Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand $\alpha\to 0$.

Solution 23
Je distingue les cas selon la valeur de $n-m$.

- $t \mapsto \frac{\sin^m(t)}{t^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et équivaut en 0 à $\frac{1}{t^{n-m}}$. C'est donc une fonction intégrable au voisinage de 0 si $n-m<1$. Dans ce cas, $A(\alpha)$ est immédiatement de limite nulle.

- On a aussi
$$A(\alpha) - \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{t^m}{t^n}\,dt = \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{\sin^m(t)-t^m}{t^n}\,dt$$
Par ailleurs,
$$\frac{\sin^m(t)-t^m}{t^n} = t^{m-n}\left(\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^m - 1\right) = \frac{1}{t^{n-m}}\left(\left(1+O(t^2)\right)^m - 1\right) = O\left(\frac{1}{t^{n-m-2}}\right)$$
Si $n-m=1$ alors $\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{t^m}{t^n}\,dt = \ln(b/a)$ et le terme ci-dessus est intégrable au voisinage de 0. Dans ce cas $A(\alpha)\to\ln(b/a)$.

- Il reste le cas $n-m\geq 2$. Pour α assez petit et $t\in[a\alpha,b\alpha]$, on a $|\sin(t)|\geq \frac{2}{\pi}t$ (par concavité de sin sur $[0,\pi/2]$ et imparité). Ainsi
$$A(\alpha) \geq \frac{2^m}{\pi^m}\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{dt}{t^{n-m}} = \left[\frac{1}{m-n+1}t^{m-n+1}\right]_{a\alpha}^{b\alpha} = \frac{\alpha^{m-n+1}(a^{m-n+1}-b^{m-n+1})}{n-m-1}$$
Comme $m-n+1<0$, cette quantité tend vers $+\infty$ quand $\alpha\to 0^+$.

Planche 24
Soient $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $B=A^3+A+I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Solution 24
Par théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P, des scalaires $d_1,\dots,d_k$ deux à deux distincts et des entiers $n_1,\dots,n_k$ tels que
$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(d_1 I_{n_1},\dots,d_k I_{n_k})$$
B commute avec A et les sous-espaces propres de A sont donc stables par B. Ainsi, $P^{-1}BP = \operatorname{diag}(B_1,\dots,B_k)$ avec B_i carrée de taille n_i.
La relation $B=A^3+A+I_n$ donne alors
$$\forall i,\ B_i = (d_i^3+d_i+1)I_{n_i}$$
Par interpolation, il existe un polynôme Q tel que $\forall i,\ Q(d_i^3+d_i+1)=d_i$ (il suffit de se limiter à des d_i distincts, car $t\mapsto t^3+t+1$ est injective). On a alors $d_iI_{n_i}=Q(B_i)$ et $A=Q(B)$.