MINES PONTS

Planche 1

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$. On pourra remarquer que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\, dt$.

Planche 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice B soit diagonalisable.

Planche 3

Donner un équivalent de $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$.

Planche 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F un sous-espace vectoriel de E et $n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente. On suppose que F est stable par n et que $E = F + \mathrm{Im}(n)$. Montrer que $F = E$.

Planche 5

Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E. On pose $H = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, $F = H^\perp \cap \mathrm{Im}(p)$ et $G = H^\perp \cap \mathrm{Im}(q)$. Montrer que p et q commutent si et seulement si F et G sont orthogonaux.

Planche 6

Existe-t-il une fonction $y \ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle de classe C^1 telle que $y'(x) + 2\sqrt{y(x)} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Si oui, quelles sont les solutions ?

Planche 7

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum(f_n)$ converge simplement.
2. Montrer que sa somme S est continue. Quelles sont ses variations ? Quelle est sa limite en $+\infty$?
3. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Planche 8

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A^2 est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}^-$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A^2 associé à une valeur propre non nulle. Donner le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A et contenant x.
3. Montrer que A est semblable une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -l_1 & & & & & & \\ l_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -l_k & & & \\ & & & l_k & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Planche 9

1. Montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\varphi(\mathcal{S}_n^{++}) = \mathcal{S}_n^{++}$. Donner un exemple d'une telle φ. Montrer que $\varphi(\mathcal{S}_n^+) = \mathcal{S}_n^+$.

Planche 10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$. Soit $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Pour $f, g \in E$, on note $(f|g) = \int_a^b fg\omega$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto t^n$. On note (P_n) la suite de E obtenue après l'orthonormalisation de la suite (f_n).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n admet n racines distinctes sur $]a, b[$ qu'on note $x_1, \ldots, x_n$.
2. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b \omega(t) P(t)\, dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(x_k).$$
3. On suppose qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b \omega(t) P(t)\, dt = \sum_{k=1}^n \beta_k P(y_k).$$
Montrer que les réels $y_1, \ldots, y_n$ sont les racines de P_n.

Planche 11

Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on note $d_{n,k}$ le nombre de permutation de $[\![1, n]\!]$ avec k points fixes. On pose
$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n,0}}{n!} x^n.$$

1. Montrer que f est définie sur $]-1, 1[$ et que $e^x f(x) = 1/(1-x)$.
2. En déduire que
$$d_{n,0} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$
3. Soit $n \geq 0$. On prend une permutation de $[\![1, n]\!]$ aléatoirement et on note T_n la variable aléatoire correspondant à son nombre de points fixes. Déterminer la loi de T_n.

Planche 12

Etudier la nature de la série de terme général
$$\prod_{k=1}^n \sqrt{k} \sin(1/\sqrt{k}).$$

Planche 13
Résoudre l'équation différentielle

$$4y'' + 4y' + 5y = e^{-x/2}\sin(x).$$

Planche 14
Soit $M \in O_p(\mathbb{R})$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^k.$$

1. Trouver la limite de la suite $(A_n X)$ si X est un point fixe de M.
2. Montrer que $\mathbb{R}^p = \ker(M - I_p) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(M - I_p)$.
3. Trouver la limite de la suite $(A_n X)$ si $X \in \mathrm{Im}(M - I_p)$.
4. Etudier la suite (A_n).

Planche 15
Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{n + 2\sin(n^3)}.$$

Planche 16
Pour $n \geq 1$, on pose

$$f_n \ : \ x \in [-\pi, \pi] \longmapsto \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Etudier les convergences simple et uniforme. Etudier la série

$$\sum_{n\geq 1} \int_0^{(-1)^n/\sqrt{n}} f_n(x)\, dx$$

Planche 17
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On suppose que P possède n racines distinctes qu'on note $x_1, \ldots, x_n$. Calculer

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}.$$

Planche 18

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda I_n$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda S$.

Planche 19
Etudier la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}.$$

Planche 20
On pose
$$\varphi \ : \ x \geq e \longmapsto \frac{x}{\ln x}.$$
Montrer que φ est une bijection. On note ψ sa bijection réciproque. Donner la nature de la série $\sum 1/\psi(n)$.

Planche 21
Soit $q \ : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$
$$y''(t) + q(t)y(t) = 0. \tag{E}$$

1. Soit y une solution bornée de (E). Montrer que $y' \to 0$ en $+\infty$.
2. En déduire qu'il existe au moins une solution non bornée.

Planche 22
Pour toute $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$, on pose
$$u(f) \ : \ \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t) \ dt \end{cases}$$

1. Montrer que l'application u est un endomorphisme.
2. Donner ses valeurs et vecteurs propres.

Planche 23
Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose
$$A(\alpha) = \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{\sin^m(t)}{t^n} \ dt.$$
Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand $\alpha \to 0$.

Planche 24
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.