EXERCICES MINES POSES A L'ORAL 2017

Planche 1 Mines

1. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$u \circ v = v \circ u,\ \ker(u) = v(\ker(u)),\ \ker(v) = u(\ker(v))$$

   (a) Montrer que $\ker(u \circ v) = \ker(u) + \ker(v)$.

   (b) Généraliser pour une famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'endomorphismes de E qui commutent.

2. Soit (x_n) une suite strictement croissante de réels > 0 de limite infinie. Montrer que

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-x_n t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_n}$$

Planche 2 Mines

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$. On suppose que $A^3 + A + I_n = B^3 + B + I_n$. Montrer que $A = B$.

2. Soit (a_n) la suite définie par $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

   (a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum(a_n x^n)$.

   (b) Etudier la convergence en 1 et -1.

   (c) Proposer une méthode pour obtenir la somme de la série.

Planche 3 Mines

1. On considère la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2 n^2}$$

   On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (a) Donner le domaine de définition de f. Etudier sa continuité.

   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (c) Trouver un équivalent de f en 0.

2. Le but de l'exercice est de trouver les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$M^3 - 3M + 2I_3 = 0 \qquad (E)$$

   (a) Trouver deux polynômes U et V tels que $(X-1)^2 U + (X+2)V = 1$.

   (b) En déduire que si M vérifie (E) alors $\mathbb{R}^3 = \ker((M - I_3)^2) \oplus \ker(M + 2I_3)$.

   (c) Que dire d'une solution M dont 1 n'est pas valeur propre ?

   (d) Que dire d'une solution M dont 2 n'est pas valeur propre ? *On montrera que M peut être de deux formes seulement.*

   (e) Traiter les cas restants.

Planche 4 Mines

1. Soit (a_n) une suite de nombres complexes telles que le rayon de convergence de $\sum(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est égal à $+\infty$. On note f la somme de la série entière.

   (a) Exprimer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta$ en fonction de R et de a_n.

   (b) On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq M$. Montrer que f est constante.

   (c) On suppose qu'il existe un polynôme P tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq |P(z)|$. Montrer que f est un polynôme.

2. Soient X, Y deux variables aléatoire indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

3. Soit $\alpha > 0$. Etudier la série de terme général $u_n = \arctan(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}) - \frac{\pi}{4}$.

Planche 5 Mines

1. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
   On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f'(x)/f(x)$ soit équivalent à a/x quand x tend vers $+\infty$.
   Soit $k > 0$; montrer que $f(kx)/f(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et donner cette limite.

2. On considère un guichet qui accueille des clients un par un.
   Pour tout entier naturel k on note B_k le nombre de clients qui arrivent faire la queue pendant l'intervalle de temps $[k; k+1[$.
   Pour tout entier naturel k, B_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p. (On note ici que pendant l'intervalle de temps $[k; k+1[$ soit 1 client, soit 0 peut arriver faire la queue). Les B_k sont mutuellement indépendantes.
   Le temps qu'un client passe au guichet pour être servi suit une loi de poisson de paramètre λ.
   On note X le nombre de clients qui sont arrivés pendant que le guichet s'est occupé d'un client.
   Donner la loi de X.

Planche 6 Mines

1. Soit X un ensemble fini. On dit que $f\ :\ X \to X$ est une involution de X si $f \circ f = Id$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, I_n le nombre d'involutions de $[|1, n|]$ et l'on convient que $I_0 = 1$.

   (a) Calculer I_1, I_2, I_3.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$. On pose $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} z^n$.

   (c) Montrer que S a un rayon $R > 0$.

   (d) Calculer $(1-x)S(x)$ pour $x \in]-R, R[$. En déduire une expression simple de $S(x)$ puis une expression de I_n.

2. Soit E un espace euclidien et soient p, q des projecteurs orthogonaux de E.

   (a) Donner la définition d'un projecteur orthogonal et un exemple de problème pour lequel la résolution nécessite l'utilisation de projecteurs orthogonaux.

   (b) Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

   (c) Montrer que les valeurs propres de u sont dans $[0, 2]$.

   (d) Déterminer $\ker(u)$ et $\ker(u - 2Id)$.