ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES

Théorème 1 (**de la base extraite**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Théorème 2 (**de la base incomplète**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Théorème 3
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul, de dimension finie, admet (au moins) une base.

Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
Il y a équivalence entre les énoncés
(i) $\mathcal{F}$ est une base de E
(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E
(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

Proposition 2 (**Dimension d'un produit d'espaces vectoriels**)
Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et

$$\dim\left(E_1 \times \cdots \times E_p\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Proposition 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E : i.e. il existe G, sous-espace vectoriel de E, tel que

$$E = F \oplus G.$$

Proposition 4 (**Formule de Grassmann**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Proposition 5
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E, alors $(u(x_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

Proposition 6
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\mathrm{Min}(\mathrm{rg(u)}, \mathrm{rg(v)})$.

Théorème 4
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Proposition 7
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre les énoncés
(i) f est un isomorphisme,
(ii) f est injective,
(iii) f est surjective.

Proposition 8
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. f est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite.

Proposition 9 **(Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$)**
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\times \dim(F)$.

Proposition 10
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E. Pour $i = 1, 2$, soit $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour $i = 1, 2$, $u_{|_{E_i}} = u_i$.

Théorème 5 **(du rang)**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
(i) Soit V un supplémentaire du noyau de f dans E. Alors V et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes.
(ii) Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini (i.e. $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie), et

$$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E.$$

Proposition 11
Soit H un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Par définition, H est un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle φ sur E telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
On a alors.
(i) Si H est un hyperplan, toute droite D de E non contenue dans H est un supplémentaire de H dans E.
(ii) Réciproquement, si H possède une droite comme supplémentaire, alors H est un hyperplan.
(iii) Si E est de dimension finie n, H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

Proposition 12 (**Intersection d'hyperplans**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
(i) L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$.
(ii) Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.

Proposition 13
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E passant par $a \in E$ et dirigé par le sous-espace vectoriel F de E. Alors pour tout $a' \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = a' + F$.

Proposition 14 (**Intersection de sous-espaces affines**)
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G. Alors :
- soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide,
- soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Proposition 15
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $a \in F$. L'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ d'inconnue x est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}(u)$.

MATRICES

n, p et q désignent des entiers naturels non nuls.

Proposition 16 (**Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**)
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie np.

Proposition 17
On note $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(E'_{i,j})$ celle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(E''_{i,j})$ celle de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, q]\!],\ \forall (k,l) \in [\![1, p]\!]^2, \quad E_{i,k}E'_{l,j} = \delta_{k,l}E''_{i,j}.$$

Proposition 18 (**Formule du binôme**)
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB = BA$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Proposition 19 (**Propriétés de la transposition**)
(i) La transposition est linéaire.
(ii) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.
(iii) $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
(iv) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Proposition 20

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 21
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x \in E$. On note A la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, X celle de x dans $\mathcal{B}$ et Y celle de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$. On a alors

$$Y = AX.$$

Proposition 22
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On note A la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) f est un isomorphisme
(ii) A est inversible.

Proposition 23
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible à droite ou à gauche alors A est inversible.

Proposition 24 (Changement de base pour un vecteur)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (i.e. les colonnes de P sont les matrices représentatives des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$, c'est aussi la matrice représentative de l'identité dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$). Soit $x \in E$. On note X la matrice représentative de x dans $\mathcal{B}$ et X' celle de x dans $\mathcal{B}'$. Alors

$$X = PX'.$$

Proposition 25 (Changement de bases pour une application linéaire)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q celle de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On note A la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et A' celle de f dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Proposition 26 (Changement de base pour un endomorphisme)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ et A' celle de f dans $\mathcal{B}'$. Alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

Théorème 6 (du rang, version matricielle)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = p.$$

Proposition 27
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.

Proposition 28 (Caractérisation du rang par les matrices extraites)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
(i) Si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors toute sous-matrice de A est de rang au plus r.
(ii) $\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe une sous-matrice de A carrée de taille r inversible et aucune sous-matrice de A carrée de taille $s > r$ n'est inversible.

Proposition 29
Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) M et N sont semblables,
(ii) il existe $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E tels que M soit la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$ et N celle de u dans $\mathcal{C}$.

Proposition 30 (Propriétés de la trace d'une matrice)
(i) La trace est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(ii) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.
(iii) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
(iv) La trace est un invariant de similitude.

Proposition 31 (**Propriétés de la trace d'un endomorphisme**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
(i) La trace est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{L}_(E)$.
(ii) $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

Proposition 32 (**Trace et rang d'un projecteur**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit p un projecteur de E. Alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Proposition 33
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On s'intéresse au système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$.
(i) L'ensemble des solutions du système homogène associé, noté $\mathcal{S}_0$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de dimension $n-$ $\mathrm{rg}(A)$.
(ii) Le système est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.
(iii) Si le système est compatible, l'ensemble des solutions du système, noté $\mathcal{S}$, est un sous-espace affine dirigé par $\mathcal{S}_0$.
(iv) Si $\mathrm{rg}(A) = n$, le système est dit "de Cramer" et il possède une unique solution ($X = A^{-1}B$).
(v) Si A est inversible, la résolution de $AX = Y$ permet d'obtenir A^{-1}.

Proposition 34
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls. Si une matrice triangulaire est inversible, son inverse est triangulaire.

DETERMINANTS

Théorème 7
Toute permutation différente de l'identité se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, en un produit de cycles à support deux à deux disjoints.

Théorème 8
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
(i) Il existe une unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ sur E telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.
(ii) Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.

Théorème 9 (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Il existe une (unique) famille de scalaires $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Alors on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Proposition 35 (Caractérisation des bases)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. On a alors

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

Proposition 36 (Déterminant d'un endomorphisme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
(i) $\det(Id_E) = 1$.
(ii) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
(iii) Pour tous f et g dans $\mathcal{L}(E)$, $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$.
(iv) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$.
(v) Pour tout $f \in \mathcal{GL}(E)$, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Proposition 37 (Déterminant d'une matrice)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Proposition 38 (Déterminant du produit de deux matrices)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Proposition 39
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition 40 (Caractérisation des matrices inversibles)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
(ii) Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Proposition 41 (**Déterminant de la transposée**)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\det(A) = \det(A^T).$$

Proposition 42 (**Opérations élémentaires et déterminant**)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(i) Le déterminant de A reste inchangé si on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A.
(ii) Le déterminant de A est changé en son opposé si on échange deux colonnes de A.
(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Le déterminant de A est multiplié par α si on multiplie tous les coefficients d'une colonne par α.

Proposition 43 (**Développements d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne.**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $(k,l) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $A_{k,l}$ la matrice issue de A en ôtant la ligne k et la colonne l de A.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\det(A) = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}(-1)^{k+l}\det(A_{k,l}).$$
(Développement du déterminant de A suivant la ligne k.)

2. Soit $l \in [\![1, n]\!]$,
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,l}(-1)^{k+l}\det(A_{k,l}).$$
(Développement du déterminant de A suivant la colonne l.)

Proposition 44 (**Déterminant d'une matrice triangulaire**)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). Le déterminant de A est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Proposition 45 (**Déterminant de Vandermonde**)
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Proposition 46 (**Comatrice**)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$$A\mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T A = \det(A) I_n.$$