CALCULS ALGEBRIQUES

Proposition 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2}\\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Proposition 2
Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $x \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Proposition 3
Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Cette formule se généralise pour deux éléments qui commutent dans un anneau.

Proposition 4 (**Triangle de Pascal**)
Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leq n$.

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Proposition 5 (**Formule du binôme**)
Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Cette formule se généralise pour deux éléments qui commutent dans un anneau.

NOMBRES REELS

Proposition 6 (**Inégalités triangulaires**)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Théorème 1 (**de la borne supérieure**)
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2 (**Partie entière**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$, n est appelé la partie entière de x et est noté $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Théorème 3 (**Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ par la convexité**)
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tous a et b dans X tels que $a \leq b$, alors $[a, b] \subset X$.

Théorème 4
Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

Proposition 7 (**Inégalités triangulaires**)
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Proposition 8 (**Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire**)
Soient z et z' dans $\mathbb{C}$.

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff (z = 0 \quad \text{ou} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ z' = \alpha z).$$

Formulaire 1 (**Formules d'Euler**)
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Formulaire 2 (**Formule de Moivre**)
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

Formulaire 3
Soient a et b dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) & = & \sin a \cos b - \cos a \sin b \\
 & & \\
\cos(2a) & = & 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a \\
\sin(2a) & = & 2 \sin a \cos a \\
 & & \\
\cos a \cos b & = & \left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)/2 \\
\sin a \sin b & = & \left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)/2 \\
\cos a \sin b & = & \left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)/2
\end{array}$$

Formulaire 4
Soient a et b dans $I = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{si } a+b \in I, \quad \tan(a+b) & = & \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\
 & & \\
\text{si } a-b \in I, \quad \tan(a-b) & = & \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{array}$$

Formulaire 5
Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, si $t = \tan \frac{\theta}{2}$,

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Proposition 9 (**Somme et produit des racines d'une équation du second degré**)
Soient a, b et c dans $\mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe δ dans $\mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux racines dans $\mathbb{C}$. On les note r_1 et r_2 (éventuellement elles sont confondues). On a alors (à l'ordre près)

$$r_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

et

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Proposition 10 (**Racines n-ièmes de l'unité**)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, i.e. l'ensemble des nombres complexes $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. On a

$$\mathbb{U}_n = \{e^{ik\frac{2\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Proposition 11
Soit $z \in \mathbb{C}$. e^z a pour module $e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\mathrm{Im}(z)$ est un argument de e^z.

Proposition 12 (**Interprétation géométrique des racines n-ièmes de l'unité**)
Les images dans le plan complexe des racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle unité.

Proposition 13 (**Nombres complexes et géométrie plane**)
Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et d.

(i) A, B et C sont alignés si et seulement si ($a = b$ ou $\frac{c-a}{b-a}$ est réel).

(ii) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si ($a = b$ ou $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur).

Proposition 14 (**Similitudes directes**)
Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et F la similitude du plan représentée par $z \mapsto az + b$.

(i) Si $a = 1$, alors l'application F est la translation de vecteur d'affixe b.

(ii) Si $a \neq 1$, alors l'application F admet un unique point invariant Ω, appelé centre de la similitude. En désignant par α un argument de a, l'application F s'écrit alors $F = H \circ R = R \circ H$, avec
- R la rotation de centre Ω et d'angle α,
- H l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

Le réel $|a|$ est appelé rapport de la similitude et α une mesure de l'angle de la similitude.

FONCTIONS USUELLES

1 Fonctions exponentielle, logarithmes et puissances.

1.1 Exponentielle et logarithme népérien.

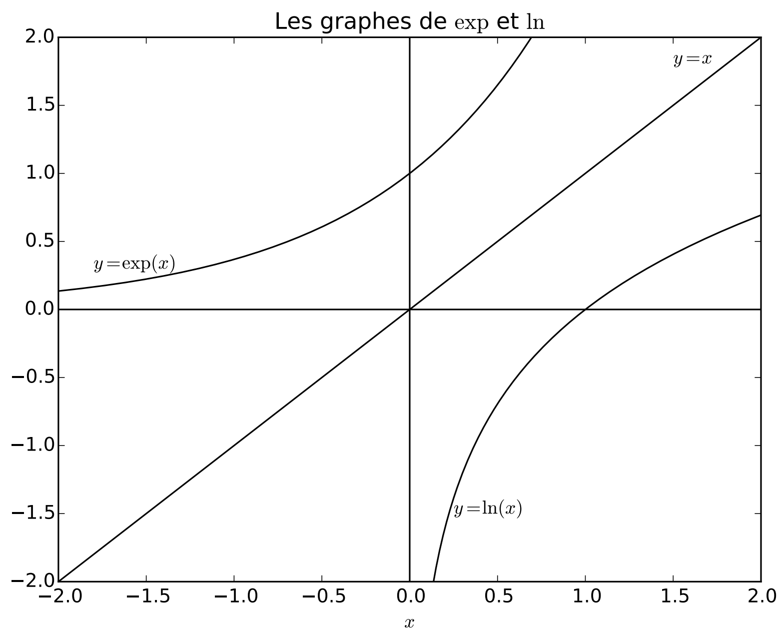
ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x) \qquad\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

ln et exp sont bijections réciproques l'une de l'autre : leurs graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



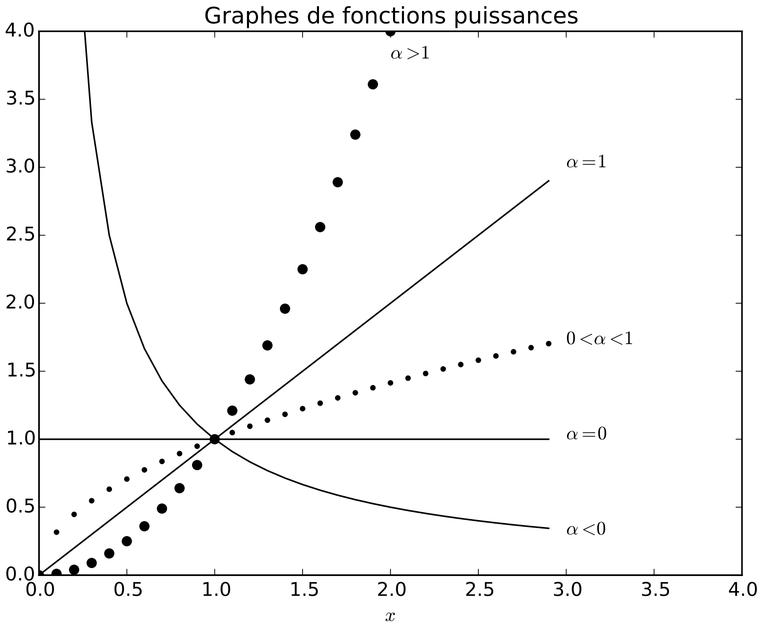
Inégalités à connaître : (étude de fonction ou convexité)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq 1 + x \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

1.2 Puissances.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(\alpha \ln x)$. On écrit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p_\alpha(x) = x^\alpha$ (c'est cohérent pour les puissances entières).

p_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.



$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad \text{et} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Pour $\alpha \geq 0$, p_α est prolongeable par continuité en 0. (En posant $p_0(0) = 1$ et pour $\alpha > 0$, $p_\alpha(0) = 0$.)
Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, on peut aussi définir p_α sur $\mathbb{R}_-^*$.

Si on note $e = \exp(1)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x.$$

1.3 Logarithme décimal, logarithme en base 2.

On note log (ou $\log_{10}$) la bijection réciproque de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, qui à x associe 10^x.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

On note $\log_2$ la bijection réciproque de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, qui à x associe 2^x.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

1.4 Croissances comparées.

$$\begin{array}{llcll}
\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & (\ln x)^\alpha & = & o(x^\beta) & [x \to +\infty] \\
\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & |\ln x|^\alpha & = & o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & [x \to 0^+] \\
\forall (a,\alpha) \in]1,+\infty[\times \mathbb{R} & x^\alpha & = & o(a^x) & [x \to +\infty] \\
\forall (a,\alpha) \in]0,1[\times \mathbb{R} & a^x & = & o(x^\alpha) & [x \to +\infty]
\end{array}$$

2 Fonctions hyperboliques.

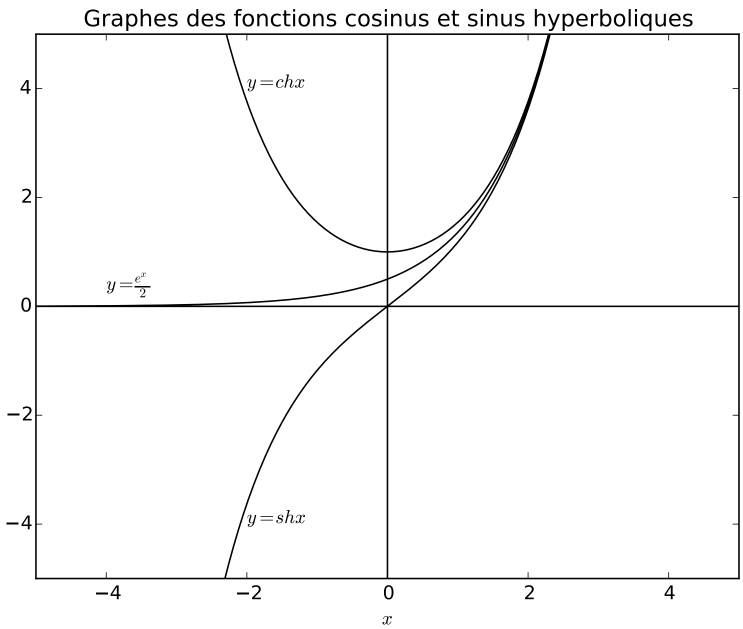
2.1 Définitions.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2.2 Propriétés.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x.$$

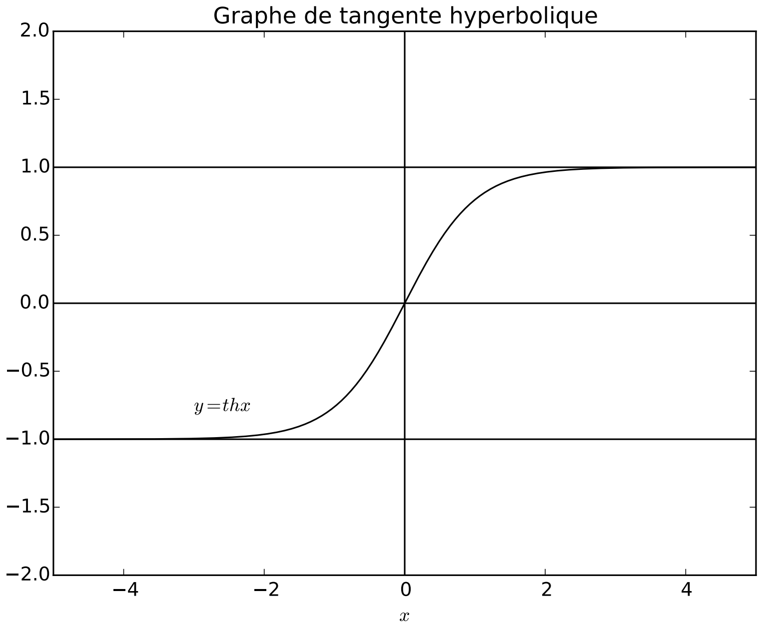
ch est paire. ch est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}x$. ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
sh est impaire. sh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}x$. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



2.3 Tangente hyperbolique.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

th est une fonction impaire. th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2$.
th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



3 Fonctions circulaires directes et réciproques.

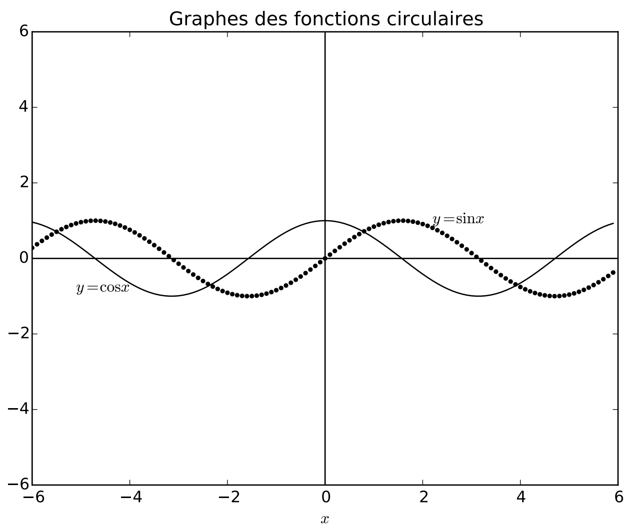
3.1 Cosinus et Sinus.

cos est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire. cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

sin est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$



$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x, \quad \sin(x+\pi) = -\sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|.$$

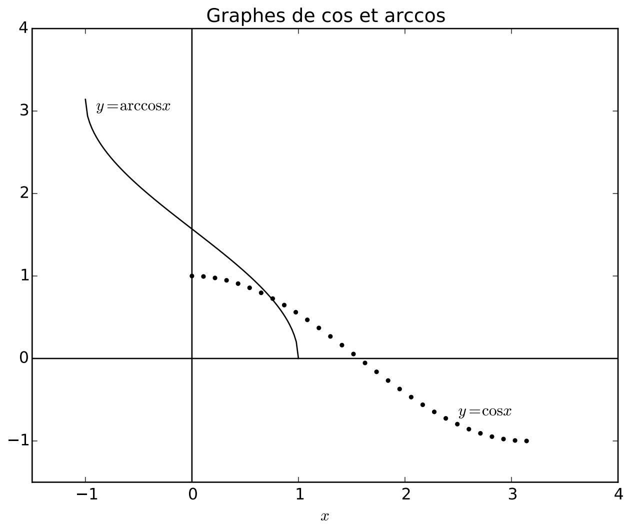
3.2 Arccosinus.

cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On appelle Arccosinus et on note Arccos sa bijection réciproque.

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos}x) = x.$$

Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



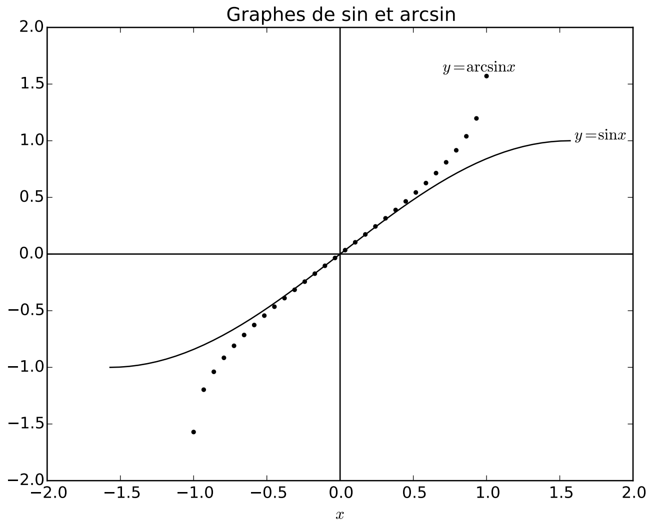
3.3 Arcsinus.

sin est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On appelle Arcsinus et on note Arcsin sa bijection réciproque.

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}(\sin x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin}x) = x.$$

Arcsin est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et

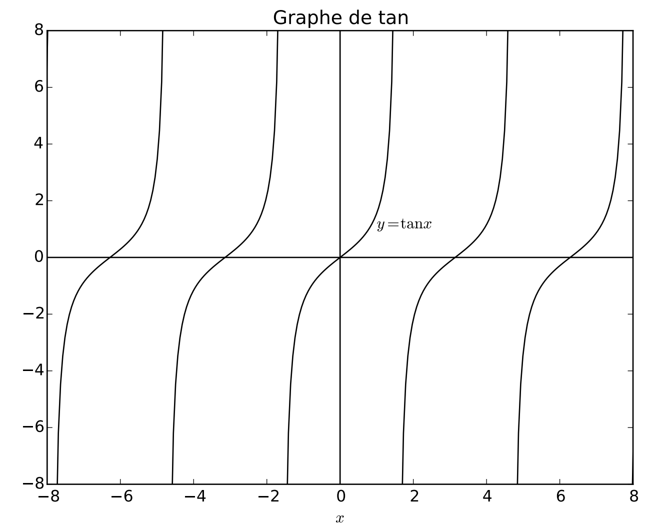
$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



3.4 Tangente et Arctangente.

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est π-périodique et impaire. tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$



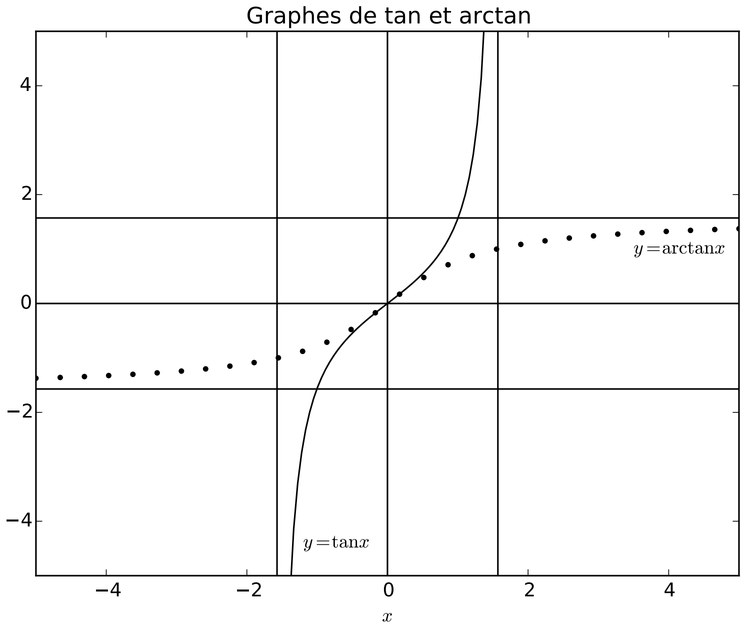
tan est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle Arctangente et on note Arctan sa bijection réciproque.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \mathrm{Arctan}(\tan x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\mathrm{Arctan} x) = x.$$

Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \tan(x+\pi) = \tan x, \quad \tan(\pi - x) = -\tan x.$$


Graphes de tan et arctan
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
x
$y=\arctan x$
$y=\tan x$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Théorème 5
Soit a une fonction continue sur I. On note φ l'application définie sur I, qui à x associe $e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a sur I. Alors l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $y'+a(x)y=0$ est la droite vectorielle engendrée par φ.

Théorème 6
Soient a et b deux fonctions continues sur I à valeurs réelles ou complexes. On note φ l'application définie sur I, qui à x associe $e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a sur I. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) $y'+a(x)y=b(x)$. On suppose connue une solution f_0 de (E) sur I. Alors l'ensemble des solutions sur I de (E) est l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe λ un scalaire tel que $f=f_0+\lambda\varphi$.
On peut dire aussi que l'ensemble des solutions sur I de (E) est le sous-esapce affine de $\mathcal{C}^1(I)$ passant par f_0 et dirigé par la droite vectorielle $\mathrm{vect}(\varphi)$.

Proposition 15 (**Méthode de variation de la constante**)
Soient a et b deux fonctions continues sur I. On note φ l'application définie sur I, qui à x associe $e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a sur I. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) $y'+a(x)y=b(x)$. On cherche une solution de (E) de la forme $f=g\varphi$, avec g de classe $\mathcal{C}^1$. $f_0=g_0\varphi$ avec g_0 une primitive sur I de $\frac{b}{\varphi}$ convient.

Proposition 16 (**Théorème de Cauchy-Lipschitz**)
Soient a et b deux fonctions continues sur I. On s'intéresse à l'équation différentielle (E)

$$y'+a(x)y=b(x).$$

Soit $x_0\in I$ et soit $y_0\in\mathbb{K}$. Le problème de Cauchy qui consiste à chercher toutes les solutions y de (E) vérifiant en plus $y(x_0)=y_0$ possède une unique solution.

Proposition 17
Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) $y''+ay'+by=0$. L'ensemble des solutions de (E), noté S, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. On s'intéresse alors à l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$.

- Si cette équation caractéristique possède deux solutions distinctes dans $\mathbb{K}$, notées r_1 et r_2, alors $(x\mapsto e^{r_1x}, x\mapsto e^{r_2x})$ est une base de S.
- Si cette équation caractéristique possède une solution double r dans $\mathbb{K}$, alors $(x\mapsto e^{rx}, x\mapsto xe^{rx})$ est une base de S.
- Si cette équation caractéristique ne possède pas de solution dans $\mathbb{K}$, alors elle en possède dans $\mathbb{C}$, conjuguées. On note $\alpha+i\beta$ l'une des deux. Alors $(x\mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x), x\mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x))$ est une base de S.

Proposition 18
Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) $y'' + ay' + by = f(x)$. On note (φ, ψ) une base du plan vectoriel des solutions de l'équation homogène associée à (E). Soit f_0 une solution de (E). L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des $f_0 + \lambda\varphi + \mu\psi$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
On peut dire aussi que l'ensemble des solutions de (E) est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ passant par f_0 et dirigé par le plan vectoriel $\text{vect}(\varphi, \psi)$.

Proposition 19
Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $A \in \mathbb{K}$. On cherche une solution à l'équation différentielle (E) :

$$y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}.$$

Il en existe une de la forme $x \mapsto Cx^d e^{\lambda x}$ où d est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de $P = X^2 + aX + b$ et C est une constante.

Proposition 20 (**Théorème de Cauchy-Lipschitz**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse à l'équation différentielle (E)

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

Soient x_0 dans $\mathbb{R}$ et $(y_0, z_0) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy qui consiste à chercher toutes les solutions y de (E) vérifiant en plus $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ possède une unique solution.

DEVELOPPEMENTS LIMITES USUELS

Les développements sont donnés au voisinage de 0.
n est un entier naturel non nul. α est un réel non nul.

$$
\begin{array}{lcl}
e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\mathrm{ch} x & = & 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\mathrm{sh} x & = & x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos x & = & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\sin x & = & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
(1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1-x) & = & -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) & = & x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \\
\mathrm{Arctan} x & = & x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x & = & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)
\end{array}
$$

Proposition 21 (**Formule de Stirling**)

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

SUITES NUMERIQUES

Proposition 22
Toute suite convergente dans $\mathbb{K}$ est bornée dans $\mathbb{K}$.

Proposition 23
Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certains rang.

Proposition 24 (Passage à la limite dans les inégalités)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq w_n$ et **si** (u_n), (v_n) et (w_n) **convergent** vers λ, μ et ν respectivement dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lambda \leq \mu \leq \nu.$$

Théorème 7 (d'encadrement)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite λ, alors (v_n) converge aussi vers λ.

Théorème 8
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On suppose qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n$$

et que (u_n) diverge vers $+\infty$. Alors, (v_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Théorème 9 (de la limite monotone)
Toute suite réelle croissante et majorée converge et sa limite est la borne supérieure de ses valeurs.
Toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Théorème 10 (des suites adjacentes)
Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) adjacentes i.e. :
(i) la suite (u_n) est croissante,
(ii) la suite (v_n) est décroissante,
(iii) la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
Alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite λ et cette limite est le seul réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lambda \leq v_n$.

Proposition 25 (Suites extraites)
Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers λ dans $\mathbb{K}$.
Alors, toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers λ.

Si (u_n) est à valeurs réelles et diverge vers $+\infty$, alors toute suite extraite de (u_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Théorème 11 (**de Bolzano-Weierstrass**)
Toute suite bornée dans $\mathbb{K}$ possède au moins une sous-suite convergente.

Théorème 12 (**Caractérisation séquentielle de la densité**)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel x est limite d'une suite d'éléments de A.

Proposition 26
(i) Soit $r \in \mathbb{K}$. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
(ii) Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a^n$.
(iii) Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq 1$. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$.

Proposition 27
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On s'intéresse à

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n\}.$$

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. On s'intéresse alors à l'équation caractéristique

$$r^2 - \alpha r - \beta = 0.$$

• Si cette équation caractéristique possède deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$, notées r_1 et r_2, alors, $((r_1^n), (r_2^n))$ est une base de E.
• Si cette équation caractéristique possède une racine double dans $\mathbb{K}$, notée r, alors $((r^n), (nr^n))$ est une base de E si $r \neq 0$; sinon on prend $((1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots))$.
• Si cette équation caractéristique ne possède pas de racine dans $\mathbb{K}$, alors elle en possède deux conjuguées dans $\mathbb{C}$. On en note une $\rho e^{i\theta}$ (l'autre est $\rho e^{-i\theta}$). Alors $((\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta)))$ est une base de E.

Théorème 13 (**des croissances comparées**)

$$\begin{array}{lrcll}
\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & (\ln n)^\alpha & = & o(n^\beta) & [n\to\infty] \\
\forall(a,\alpha) \in]1,+\infty[\times\mathbb{R} & n^\alpha & = & o(a^n) & [n\to\infty] \\
\forall a \in \mathbb{R}_+^* & a^n & = & o(n!) & [n\to\infty] \\
\forall(a,\alpha) \in]0,1[\times\mathbb{R} & a^n & = & o(n^\alpha) & [n\to\infty]
\end{array}$$

Proposition 28
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites à valeurs réelles. On suppose

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq v_n \leq w_n$,

(ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$,

alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

Proposition 29
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$,

(i) Si (v_n) a une limite finie, alors (u_n) a une limite finie et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

(ii) Si (v_n) est positive à partir d'un certain rang, alors (u_n) est positive à partir d'un certain rang.

LIMITES ET CONTINUITE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS REELLES OU COMPLEXES

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Proposition 30
Toute fonction admettant une limite dans $\mathbb{K}$ en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est bornée dans $\mathbb{K}$ au voisinage de a.

Proposition 31
Soient f et g dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Soient b et c dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que f tend vers b en a et que g tend vers c en a.
(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ tend vers $\lambda b + \mu c$ en a.
(ii) fg tend vers bc en a.
(iii) On suppose de plus que $c \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et $\frac{f}{g}$ tend vers $\frac{b}{c}$ en a.

Proposition 32 (**Caractérisation séquentielle de la limite**)
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $b \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) la fonction f a pour limite b en a,
(ii) pour toute suite (a_n) d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(a_n))$ converge vers b.

Proposition 33 (**Composition**)
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$ telle que $f(I) \subset J$. Soit $b \in \overline{J} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $c \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si f tend vers b dans $\mathbb{R}$ en a et si g tend vers c dans $\mathbb{K}$ en b, alors $g \circ f$ tend vers c dans $\mathbb{K}$ en a.

Proposition 34 (**Passage à la limite dans les inégalités**)
Soient f, g et h trois fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$
S'il existe un voisinage de a dans I sur lequel $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et **si** f, g et h **convergent** vers λ, μ et ν respectivement dans $\mathbb{R}$ en a, alors
$$\lambda \leq \mu \leq \nu.$$

Théorème 14 (**d'encadrement**)
Soient f, g et h trois fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose qu'il existe un voisinage de a dans I sur lequel $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si f et h convergent vers λ dans $\mathbb{R}$ en a, alors g converge vers λ en a.

Théorème 15 (**de minoration**)
Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose qu'il existe un voisinage de a dans I sur lequel $f(x) \leq g(x)$. Si f diverge vers $+\infty$ en a, alors g diverge vers $+\infty$ en a.

Théorème 16 (**de majoration**)
Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose qu'il existe un voisinage de a dans I sur lequel $f(x) \leq g(x)$. Si g diverge vers $-\infty$ en a, alors f diverge vers $-\infty$ en a.

Théorème 17 (**de la limite monotone**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a, b[, \mathbb{R})$, croissante et majorée sur $[a, b[$, alors f converge en b^- dans $\mathbb{R}$ et sa limite est la borne supérieure de ses valeurs.
Si f est croissante non majorée alors f diverge vers $+\infty$ en b^-.

Proposition 35 (**Caractérisation séquentielle de la continuité**)
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) f est continue en a.
(ii) Pour toute suite $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a dans $\mathbb{R}$, $(f(a_n))$ tend vers $f(a)$ dans $\mathbb{K}$.

Proposition 36
(i) Toute combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I.
(ii) Tout produit de fonctions continues sur I est continue sur I.
(iii) Le quotient de deux fonctions continues sur I, dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, est continue sur I.
(iv) Si f est continue sur I et à valeurs dans J un intervalle de $\mathbb{R}$ et si g est continue sur J, alors la composée $g \circ f$ est une application continue sur I.

Théorème 18 (**des valeurs intermédiaires**)
L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.
Autre version : soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient c et d dans $f(I)$, avec $c < d$, alors

$$\forall \gamma \in]c, d[\qquad \exists \delta \in I, \quad f(\delta) = \gamma.$$

Théorème 19
L'image d'un segment par une application continue à valeurs réelles est un segment.
Autre version : une application à valeurs réelles, continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 20
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\tilde{f} : I \to f(I)$, $x \mapsto f(x)$. On suppose que f est continue et strictement monotone. Alors
(i) $f(I)$ est un intervalle,
(ii) $\tilde{f}$ est bijective,
(iii) $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone, de même monotonie que f,
(iv) $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$.

Théorème 21 (**des croissances comparées**)

$$\begin{array}{llcll}
\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & (\ln x)^\alpha & = & o(x^\beta) & [x\to+\infty] \\
\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & |\ln x|^\alpha & = & o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & [x\to 0^+] \\
\forall(a,\alpha)\in]1,+\infty[\times\mathbb{R} & x^\alpha & = & o(a^x) & [x\to+\infty] \\
\forall(a,\alpha)\in]0,1[\times\mathbb{R} & a^x & = & o(x^\alpha) & [x\to+\infty]
\end{array}$$

Proposition 37
Soient f, g et h trois fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de $a\in\mathbb{R}$. On suppose
(i) $f\leq g\leq h$ au voisinage de a,
(ii) $f(x)\underset{x\to a}{\sim}h(x)$,
alors

$$g(x)\underset{x\to a}{\sim}f(x).$$

Proposition 38
Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de $a\in\mathbb{R}$. On suppose que $f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)$.
(i) Si g a une limite finie en a, alors f a une limite finie en a et $\lim\limits_a f=\lim\limits_a g$.
(ii) Si g est positive au voisinage de a, alors f est positive au voisinage de a.

DERIVATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS REELLES OU COMPLEXES

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Proposition 39
Toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

Proposition 40
Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs réelles. Soit a un point de I. Alors le graphe de f possède une tangente en $(a, f(a))$ d'équation cartésienne :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Proposition 41
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

(ii) fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(iii) On suppose de plus que g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proposition 42
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dérivable sur I. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit $\varphi \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, dérivable sur J telle que $\varphi(J) \subset I$.
Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et

$$(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi).\varphi'.$$

Proposition 43
Soit $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur I. Alors $\exp \circ \varphi$ est dérivable sur I et

$$(\exp \circ \varphi)' = \varphi' \exp \circ \varphi.$$

Proposition 44
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement monotone sur I, dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur J, f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ (f^{-1})}.$$

Proposition 45 (Formule de Leibniz)
Soient f et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Proposition 46
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a à l'intérieur de I.
Si f admet un extremum local en a et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème 22 (**de Rolle**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et dérivable sur $]a, b[$.

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in]a, b[\quad \text{tel que} \quad f'(c) = 0.$$

Théorème 23 (**des accroissements finis**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et dérivable sur $]a, b[$.

$$\exists c \in]a, b[\qquad \text{tel que} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Théorème 24 (**Inégalité des accroissements finis**)
Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs réelles. On suppose que f' est bornée sur I : i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t dans I, $|f'(t)| \leq M$. Alors f est M-lipschitzienne sur I, i.e. pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Théorème 25 (**de la limite de la dérivée**)
Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs réelles. On suppose que f' tend vers l (fini ou infini) en a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers l lorsque x tend vers a.
Si l est fini, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.
Si l est infini, f n'est pas dérivable en a et le graphe de f présente une tangente verticale au point $(a, f(a))$.

FONCTIONS CONVEXES

Proposition 47 (**Inégalité de convexité**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors pour $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+)^n$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Proposition 48 (**Inégalité des pentes**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si pour tout $(x, y, z) \in I^3$ avec $x < y < z$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Proposition 49
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, $\varphi_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.

Proposition 50 (**Position du graphe par rapport à ses sécantes**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est convexe. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Proposition 51
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Proposition 52 (**Position du graphe par rapport à ses tangentes**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable. $\forall (x, a) \in I^2 \quad f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$.

Proposition 53
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. f est convexe si et seulement si $f" \geq 0$.

INTEGRATION DES FONCTIONS CONTINUES D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS REELLES OU COMPLEXES

Théorème 26 (**Théorème de Heine**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur le $[a, b]$. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Proposition 54
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. L'application qui à f continue sur $[a, b]$ associe $\int_a^b f$ est une forme linéaire positive.

Proposition 55
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$ alors

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|.$$

Proposition 56 (**Relation de Chasles**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$. Soit $c \in]a, b[$. Alors f est continue sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition 57
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs positives telles que $\int_a^b f = 0$. Alors $f = 0$.

Proposition 58
Soit f une fonction paire et continue par morceaux sur I, avec I centré en 0. Pour $a \in I$, $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.
Soit f une fonction impaire et continue par morceaux sur I, avec I centré en 0. Pour $a \in I$, $\int_{-a}^a f = 0$.

Proposition 59
Soit f T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f.$$

Théorème 27 (**de Riemann**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$ (ou $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$). Alors $(R_n(f))$ converge vers $\int_a^b f$.

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Théorème 28 (**fondamental**)
Soit a dans I et soit f continue sur I.
(i) la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a,
(ii) f possède une primitive sur I,
(ii) pour toute primitive h de f sur I, pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a).$$

Proposition 60
Soit a dans I et soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors, pour $x \in I$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Proposition 61 (**Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes**)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs complexes. On suppose que f' est bornée sur I : i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t dans I, $|f'(t)| \leq M$. Alors f est M-lipschitzienne sur I, i.e. pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Proposition 62 (**Intégration par parties**)
Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Pour tout (a, b) dans I^2

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Proposition 63 (**Changement de variable**)
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit f dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ avec $\varphi(J) \subset I$. Alors pour tout (α, β) dans J^2

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Théorème 29 (**Taylor avec reste intégral**)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Théorème 30 (**Inégalité de Taylor-Lagrange**)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur I par une constante notée M_{n+1}. Pour tout $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

Théorème 31 (**Formule de Taylor-Young**)
Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$. Soit $x_0 \in I$.
Alors f possède un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right) \qquad [x \to x_0].$$

Proposition 64
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs réelles. Soit a intérieur à I.
(i) Si f possède un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
(ii) Si $f'(a) = 0$ et si $f''(a) > 0$ alors f possède un minimum local en a.
(iii) Si $f'(a) = 0$ et si $f''(a) < 0$ alors f possède un maximum local en a.

SERIES NUMERIQUES

Proposition 65 (**Séries géométriques**)
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$; lorsqu'elle converge, sa somme vaut $\frac{1}{1-z}$.

Proposition 66 (**Série exponentielle**)
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 67 (**Transformation suite-série**)
Soit (u_n) une suite numérique.

(u_n) converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Proposition 68 (**Linéarité de la somme**)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques convergentes. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Proposition 69
(i) Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.
(ii) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Proposition 70
Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ converge} \quad &\iff \quad \sum \mathrm{Re(u_n)} \text{ et } \sum \mathrm{Im(u_n)} \text{ convergent} \\ &\iff \quad \sum \overline{u_n} \text{ converge.} \end{aligned}$$

Proposition 71
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si c'est le cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right).$$

Théorème 32 (**de comparaison**)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

(i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

(iii) Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 33
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Proposition 72 (de comparaison)
Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à valeurs positives.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Proposition 73
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et monotone.
(i) Si f est décroissante, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$,

$$\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_{p}^{q} f.$$

(ii) Si f est croissante, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$,

$$\int_{p}^{q} f \leq \sum_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_{p+1}^{q+1} f.$$

Proposition 74 (Séries de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 34 (spécial à certaines séries alternées)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels.
Si $\sum u_n$ est alternée, si $u_n \to 0$ et si $(|u_n|)$ est décroissante, alors

1. $\sum u_n$ converge, on note alors, pour $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'indice n de $\sum u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1},
4. si on note S la somme de la série, S est du signe de u_0.