EXERCICES ENSAM POSES A L'ORAL 2017

Planche 1 Ensam (info oubliée)
On note $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n\}$. Soit alors $\Phi\ :\ E \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$\Phi((u_n)) = (u_0, u_1, u_2)$$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme. En déduire $\dim(E)$.
2. Pour $u, v \in E$, on pose $(u|v) = u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2$. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur E.
3. On pose $d\ :\ E \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $d((u_n)) = (v_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$. Montrer que $d \in \mathcal{L}(E)$ puis que $d \in O(E)$. Préciser la nature de d et étudier sa diagonalisabilité.
4. Montrer que si $u \in E$, $\sum \frac{u_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Planche 2 Ensam

1. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{\ln(n!)}{n}$.
   (a) Quelle est la nature de (u_{2n}) ?
   (b) En déduire la limite de (u_{2n+1}).
   (c) Quelle est la nature de $\sum(1/u_n)$?
   (d) Quel est le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{u_n} z^n$?
2. (a) Rappeler comment on obtient quotient et reste dans une division euclidienne en Python.
   (b) Ecrire une fonction `Di2` qui prend en argument une chaîne de caractère contenant un nombre écrit en base 2 et qui renvoie ce nombre écrit en base 10.
   (c) Ecrire une fonction qui prend en argument un nombre écrit en base 10 et renvoie son écriture en base 2 sous forme d'une chaîne de caractère.

Planche 3 Ensam (info oubliée)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X admet une espérance. Montrer que
$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X \geq n) - N\mathbb{P}(X \geq N + 1)$$
   En déduire que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

2. Un automobiliste cherche une place dans un parking. S'il n'a pas trouvé de place au $(n-1)$-ième tour, il a la probabilité $\frac{n}{n+1}$ de trouver une place au n-ième tour. On note X_n la variable aléatoire valant 1 si l'automobiliste trouve une place au n-ième tour et 0 sinon et T la variable aléatoire donnant le nombre de tours effectués.

   (a) Que vaut $\mathbb{P}(T \geq 1)$? Montrer que $\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0)$. Montrer que
   $$\mathbb{P}(T \geq n) = \frac{1}{n!}$$

   (b) Que vaut, en moyenne, le nombre de tours effectués ?

Planche 4 Ensam

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On note $f \ : \ z \mapsto az - b\overline{z}$.

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$.

   (b) Déterminer la trace et le déterminant de f.

   (c) Donner une CNS sur a et b pour que f soit diagonalisable.

2.

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $x_n^n + 1 - nx_n = 0$.

   (b) Ecrire une fonction `DichoImp(n)` calculant la valeur de x_n par méthode de dichotomie.

   (c) Ecrire une fonction `NewtonImp(n)` calculant la valeur de x_n par méthode de Newton.

   (d) Conjecturer la valeur de la limite de (x_n) par le tracé avec la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.

Planche 5 Ensam

1. Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que l'endomorphisme canoniquement associé à A soit a tel que
   $$a(e_1) = e_1 + e_{2n+1} \quad \text{et} \quad \forall i \in [|2, 2n+1|], \ a(e_i) = e_i + e_{i-1}$$

   (a) Calculer χ_A

   (b) Montrer que A est inversible.

   (c) Exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.

   (d) Déterminer les valeurs propres complexes de A. Calculer alors
   $$\prod_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

2. Soit $f_n \ : \ x \in [1, 2] \mapsto x^{n+1} - x^n - 1$.

   (a) Afficher les 10 premiers graphes des f_n.

   (b) Ecrire une fonction `solution(n)` prenant en argument un entier $n > 0$ et renvoyant l'unique $x \in [1, 2]$ tel que $f_n(x) = 0$ avec une précision 10^{-3}.

   (c) Afficher les 100 premières valeurs $u_n \in [1, 2]$ telles que $f_n(u_n) = 0$.

Planche 6 Ensam

1. Un segment est représenté par une liste $[a, b]$.
   (a) Deux segments sont disjoints si leur intersection est vide.
   Ecrire une fonction `EstDisjoint` qui teste si deux segments sont disjoints.
   (b) La fusion de deux segments est un segment dont l'extrémité gauche est le minimum des deux extrémités gauches des segments et dont l'extrémité droite est le maximum des deux extrémités droites des segments.
   Ecrire une fonction `Fusion` qui donne la fusion de deux segments.
   (c) Une liste bien ordonnée est une liste dont les éléments sont des segments deux à deux disjoints, et dont les éléments sont rangés par ordre croissant.
   On note $L_1 = [[1, 3], [4, 5], [3, 6]]$, $L_2 = [[1, 2], [3, 5], [2, 6]]$ et $L_3 = [[1, 3], [4, 5], [6, 7]]$.
      i. Dire si ces listes sont bien ordonnées.
      ii. Ecrire une fonction récursive `BienOrdonnée` qui vérifie si une liste est bien ordonnée.
   (d) Soit L une liste de segments et x un nombre quelconque. Ecrire une fonction `Appartient` qui prend en argument L et x et qui renvoie True si x appartient à un des segments de L et `False` sinon.

2. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout réel t, on note $H_Z(t) = \mathbb{P}(Z \geq t)$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(Z = k - 1) = H_Z(k - 1) - H_Z(k)$.
   (b) On donne $\mathbb{P}(Z = 0) = 1/6$, $\mathbb{P}(Z = 1) = 1/3$, $\mathbb{P}(Z = 3) = 1/2$. Tracer le graphe de H_Z.
   (c) Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=1}^{n} H_Z(k) - nH_Z(n + 1)$$
   (d) Montrer que si $\sum(H_Z(k))$ converge alors Z admet une espérance et que dans ce cas
   $$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} H_Z(k)$$

Planche 7 Ensam

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
   (a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. Donner une série entière de rayon de convergence 3.
   (b) Trouver le rayon de convergence de f.
   (c) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{2y}{4x-1}$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$
   (d) Résoudre cette équation différentielle sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$
   (e) Expliciter $f(x)$ pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$

2. Méthode de Faddeev.
   Il s'agit d'une méthode pour calculer les coefficients du polynôme caractéristique, de complexité plus faible que le calcul naïf d'un déterminant.
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit par récurrence $B_0 = I_n$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = AB_{k-1} - \alpha_k I_n$ avec $\alpha_k = \frac{\mathrm{Tr}(AB_{k-1})}{k}$. Le polynôme caractéristique de A s'écrit alors $\chi_A = X^n - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k X^{n-k}$.
   On dispose de `eye(n)` qui renvoie I_n et de `dot(A,B)` qui renvoie le produit AB.

(a) Définir une fonction `Trace` qui prend en argument A, une matrice carrée de taille n et qui renvoie la trace de A.

(b) Définir une fonction renvoyant un tuple composé de B_n et de la suite α_k.

(c) La tester avec la matrice $H = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, avec $n = 3$ et $n = 4$. On pourra notamment construire le polynôme caractéristique de H dans ces deux cas, chercher ses racines et les comparer avec les valeurs propres de H.

Planche 8 Ensam

1. On pose $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$ et $f(x) = \int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t}dt$.

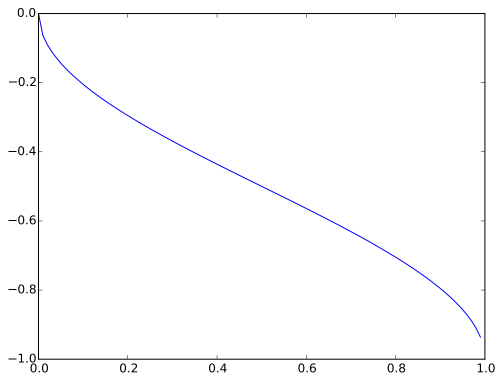
   (a) Justifier l'existence de I.

   (b) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$. En déduire la valeur de f(x) pour $x \geq 0$.

   (d) En déduire la valeur de I.

2. On étudie le toboggan suivant :



   qui représente le graphe de la fonction y (profil du toboggan). L'axe des y est orienté vers le bas. Il faut lire les ordonnées comme étant positives.

   On sait que le temps de descente est donné par $T(y) = \int_0^1 f(x)dx$ avec $f(x) = \frac{\sqrt{1+y^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}$.

   On utilise la méthode du point milieu : pour $N \in \mathbb{N}^*$, $T_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right)$.

   (a) Ecrire une fonction `PointMilieu` qui prend en arguments y et N et qui renvoie le temps de descente approximatif grâce à cette méthode.
   Quel est son intérêt ? Comparer à la méthode des rectangles.

   (b) Définir et tracer les deux toboggans suivants : $y(x) = x$ (plan) et $y(x) = \sqrt{x}$ (raide).

   (c) Calculer le temps de descente pour les deux toboggans précédents.

Planche 9 Ensam

1. Soient U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $U \neq 0$ et $V \neq 0$. On pose $M = UV^T$ et $W = V^T U$.
   (a) Quelle est la taille des matrices M et W ?
   (b) Quel est le rang de M ? De W ?
   (c) Calculer M^p, W^p, pour $p \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante à la diagonalisabilité de M.
2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = N \in \mathbb{N}^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ si u_n est impair.
   (a) Tracer les 50 premières valeurs de la suite dans le cas où $N = 7$ et $N = 18$.
   (b) Que dire de la suite s'il existe une valeur n_0 pour laquelle $u_{n_0} = 1$?
   (c) On appelle temps de vol de la suite le nombre de termes avant d'atteindre la valeur 1. Ecrire une fonction `Vol` qui prend en argument N et qui renvoie le temps de vol.

Planche 10 Ensam

1. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On définit T sur E : pour $f \in E$, $T(f)$ est la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$
   (a) Montrer que pour tout $f \in E$, $T(f) \in E$.
   (b) Montrer que T est un endomorphisme de E.
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Donner $T(f_a)$.
   En déduire une valeur propre de T et un vecteur propre associé.
   (d) On note F le sous-espace vectoriel de E des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est stable par T et que T est lipschitzienne sur F, muni de la norme $\|.\|_\infty$.
2. On dit d'un nombre $n \geq 1$ qu'il est narcissique s'il est égal à la somme des puissances p-ièmes des chiffres de sa représentation en base 10 où p désigne le nombre de ses chiffres.
   (a) Que fait la fonction suivante ?
```
def chiffres(n):
    if n==0:
        return [0]
    else:
        l=[]
        while n!=0:
            l.append(n%10)
            n=n//10
        l=l[::-1]
    return(l)
```
   (b) 93084 est-il narcissique ?
   (c) Ecrire une fonction donnant tous les nombres narcissiques entre 0 et 10000.
   (d) Ecrire une fonction d'arguments n et N, qui donne le premier nombre narcissique entre n et N ($n < N$).
   (e) Ecrire une fonction qui renvoie la liste des nombres narcissiques et premiers entre 1 et 10000.