DEVOIR SURVEILLE 9*

Sur le calcul des variations

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ni vide, ni réduit à un point, et un ensemble E de fonctions $f : I \to \mathbb{R}$. On se donne une application $J : E \to \mathbb{R}$ définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir f et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de J sur E :

$$\min_{f \in E} J(f)$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points f de E en lesquels J atteint son minimum. On note $E^k_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. La notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction y.

A. Préliminaire

1. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?

   On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{C}$ et on considère la matrice A de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.
3. En déduire les solutions $X : I \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle

$$X' = AX \tag{1}$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$y^{(4)} + y'' + y = 0 \tag{2}$$

   et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pourra considérer le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$$

B. Un lemme de du Bois-Reymond

5. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = (1-t^2)^3$ si $|t| \leqslant 1$ et $h(t) = 0$ sinon. Montrer que $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et représenter son graphe. La fonction h est-elle de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?
6. Soit x_0, x_1 des nombres réels tels que $x_0 < x_1$. Construire à partir de h une fonction $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $g(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0, x_1[$ et $g(x) = 0$ ailleurs.
7. Soit $F \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $u \in E^2_{0,0}$. Démontrer qu'alors F est nulle.

C. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E^2_{a,b}$ pour un couple donné (a, b) de nombres réels. La fonction J est définie sur E par la formule

$$J(f) = \int_0^1 \left[P\Big(f(x)\Big) + Q\Big(f'(x)\Big)\right] \mathrm{d}x$$

où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes fixés.
Soit $f_0 \in E$. On se propose de prouver que si $J(f_0) \leqslant J(f)$ pour tout $f \in E$, alors f_0 vérifie une certaine équation différentielle. Soit $u \in E^2_{0,0}$.

8. Montrer que l'application q définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

   est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(a_0, a_1, ..., a_r)$ de nombres réels telle que $q(t) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k t^k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Expliciter le coefficient a_1 sous la forme d'une intégrale faisant intervenir les polynômes dérivés P' et Q'.

9. On suppose que pour tout $f \in E$, $J(f_0) \leqslant J(f)$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et en déduire l'équation différentielle :

$$\forall x \in [0,1], \quad P'\Big(f_0(x)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[Q'\Big(f_0'(x)\Big)\right] \tag{Δ}$$

Exemples

Premier exemple. On choisit $E = E^2_{0,1}$ et $J = J_1$ définie par $J_1(f) = \displaystyle\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2 \mathrm{d}x$.

10. Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à $E^2_{0,1}$.
11. Montrer que J_1 admet un minimum sur $E^2_{0,1}$, préciser sa valeur ainsi que les points de $E^2_{0,1}$ où ce minimum est réalisé. (On pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Deuxième exemple. On choisit $E = E^2_{0,0}$ et $J = J_2$ définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 \Big(f'(x)\Big)^2 + \Big(f'(x)\Big)^3 \mathrm{d}x$$

12. Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à $E^2_{0,0}$.
13. Montrer que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$. (On pourra se servir de la fonction u définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par la formule $u(x) = x^2(1 - x)$.)

D. Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$. On rappelle que l'ensemble des fonctions $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que g^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que l'on note L^2.
Dans les deux questions suivantes, on considère $f \in E$.

14. Montrer que le produit ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(x)f'(x)$ ne tend *pas* vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
15. En déduire que $f' \in L^2$, puis que $f(x)f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Dans cette partie, la fonction J est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left[\Big(f(x)\Big)^2 - \Big(f'(x)\Big)^2 + \Big(f''(x)\Big)^2\right] \mathrm{d}x$$

Par un raisonnement identique à celui de la partie C, on peut montrer, et on l'admettra, que si la fonction J présente un minimum en un élément f de E, alors f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (2) : $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

16. Déterminer les solutions de (2) qui appartiennent à E. (On pourra d'abord étudier leur appartenance à L^2.)

On note e_1 et e_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par les formules

$$e_1(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad e_2(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Un calcul montre, et on l'admettra, que pour tous réels α et β,

$$J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}$$

On pose également, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

17. On suppose, dans cette question, que la fonction J présente un minimum en un élément f de E. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$. Montrer par ailleurs qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\Psi$.
18. Montrer que pour tout $f \in E$ et tout réel $A > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{A} &\left[\Big(f(x)\Big)^2 - \Big(f'(x)\Big)^2 + \Big(f''(x)\Big)^2\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{A} \Big[f(x) + f'(x) + f''(x)\Big]^2 \mathrm{d}x + \Big(f(0) + f'(0)\Big)^2 - \Big(f(A) + f'(A)\Big)^2\end{aligned}$$

    Quel est le comportement de $\Big(f(A) + f'(A)\Big)^2$ lorsque $A \to +\infty$? En déduire que la fonction J admet effectivement un minimum au point $\lambda\Psi$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.
19. Indiquer comment le point de vue de la question précédente permet de retrouver directement toutes les fonctions $f_0 \in E$ telles que $J(f_0) = \min\limits_{f \in E} J(f)$, sans passer par l'équation différentielle (2).

E. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la partie précédente, et pour tout $g \in L^2$, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \big(g(x)\big)^2 \mathrm{d}x}$$

20. Montrer que pour tout $f \in E$,

$$\|f'\|^2 \leqslant 2\|f\| \cdot \|f''\|$$

On pourra poser $f_\mu(x) = f(\mu x)$ et utiliser le fait que $J(f\mu) \geqslant 0$, pour *tout* réel $\mu > 0$.

21. Déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.