

DEVOIR SURVEILLE 9**

Notations

Si n est un entier naturel et I un intervalle de \mathbb{R} , on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur I , à valeurs réelles, de classe \mathcal{C}^n , i.e. n fois dérivables sur I et dont la dérivée n -ième est continue sur I .

On munit $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([-1, 1]), \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} |f(t)|.$$

Soit $y \in I$. On dira qu'une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^n au voisinage de y s'il existe un intervalle J ouvert non vide tel que $y \in J$ et $u \in \mathcal{C}^n(I \cap J)$.

Soit $(x, p) \mapsto H(x, p)$ une fonction continue sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Le but de ce problème est d'étudier certaines fonctions u vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in [-1, 1], \quad u(x) + H(x, u'(x)) = 0. \quad (1)$$

Partie I

On suppose dans cette partie qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ vérifiant

$$\begin{cases} u(x) + |u'(x)| = 0 & \text{pour tout } x \in [-1, 1], \\ u(-1) = u(1) = -1 \end{cases} \quad (2)$$

1. (a) Justifier que l'application $x \mapsto |u'(x)|$ est une fonction de $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ et en déduire que u est de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de tout point $y \in [-1, 1]$ tel que $u'(y) \neq 0$. Calculer l'expression de $u''(y)$ en fonction de $u'(y)$ en de tels points.

(b) Montrer que si $y \in [-1, 1]$ est tel que $u'(y) = 0$, alors u' est dérivable en y et $u''(y) = 0$.

2. En déduire que u est une fonction de $\mathcal{C}^2([-1, 1])$, qu'elle vérifie sur $[-1, 1]$ l'équation différentielle

$$u'' = u$$

et conclure qu'une telle fonction u n'existe pas.

3. Montrer que les fonctions u_0 et u_1 définies par $u_0(x) = -e^{-1+|x|}$ et $u_1(x) = -e^{1-|x|}$ sur $[-1, 1]$ sont des fonctions de $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ et vérifient

$$\begin{cases} u(x) + |u'(x)| = 0 & \text{pour tout } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ u(-1) = u(1) = -1. \end{cases}$$

Partie II

Soit $u \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$.

On définit le **sur-différentiel** de u en $x \in]-1, 1[$ comme l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x , avec $\varphi'(x) = p$ et telle que $u - \varphi$ admet un maximum local en x . On note cet ensemble $D^+u(x)$.

On définit le **sous-différentiel** de u en $x \in]-1, 1[$ comme l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x , avec $\varphi'(x) = p$ et telle que $u - \varphi$ admet un minimum local en x . On note cet ensemble $D^-u(x)$.

4. Soit $x_0 \in]-1, 1[$. Montrer que si u est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x_0 alors

$$D^+u(x_0) = D^-u(x_0) = \{u'(x_0)\}.$$

5. Soit $x_0 \in]-1, 1[$. On suppose que $D^+u(x_0)$ et $D^-u(x_0)$ sont non vides.

- (a) Prouver qu'il existe φ_1, φ_2 de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x_0 et $\delta > 0$ tels que

$$u(x_0) = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$$

et pour tout $x \in [-1, 1]$ avec $|x - x_0| < \delta$,

$$\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x).$$

- (b) En déduire que u est dérivable en x_0 . Déterminer $D^+u(x_0)$ et $D^-u(x_0)$.

6. (a) Soit $x_0 \in]-1, 1[$. Soit $0 < r < \min(|1 - x_0|, |1 + x_0|)$. En considérant la fonction définie par $\varphi_{x_0, r}(x) = \frac{1}{r^2 - |x - x_0|^2}$ sur l'intervalle ouvert $I_{x_0}(r) =]x_0 - r, x_0 + r[$, montrer qu'il existe $y \in I_{x_0}(r)$ tel que $D^+u(y) \neq \emptyset$.

- (b) Démontrer que l'ensemble $\{y \in]-1, 1[, D^+u(y) \neq \emptyset\}$ est dense dans $] - 1, 1[$.

7. (a) Soit $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $D^+u(x_0) \neq \emptyset$. Soit $p \in D^+u(x_0)$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [-1, 1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \leq 0. \quad (3)$$

Dans les sous-questions 7.b à 7.e on considère $x_0 \in]-1, 1[$ et $p \in \mathbb{R}$ satisfaisant (3). Le but est de montrer qu'alors réciproquement $p \in D^+u(x_0)$.

- (b) On pose, pour $r > 0$,

$$\varphi(r) = \max \left\{ 0, \sup_{\substack{y \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap [-1, 1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \right\}$$

et $\varphi(0) = 0$. Justifier que, pour tout $r > 0$, $\varphi(r)$ est un nombre réel bien défini, puis que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$u(x) \leq u(x_0) + p(x - x_0) + \varphi(|x - x_0|)|x - x_0|.$$

- (c) Montrer que la fonction ρ définie sur \mathbb{R}_+ par $\rho(x) = \int_0^x \varphi(s) ds$ appartient à $\mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ et vérifie

$$\rho(0) = \rho'(0) = 0.$$

(d) Prouver que

$$\forall r \geq 0, \quad \rho(2r) \geq \varphi(r)r.$$

(e) Conclure que $p \in D^+u(x_0)$ et que, pour tout $x_0 \in]-1, 1[$,

$$D^+u(x_0) = \left\{ p \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [-1, 1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \leq 0 \right\}.$$

On peut montrer de même, mais on ne demande pas de le vérifier, que pour tout $x_0 \in]-1, 1[$,

$$D^-u(x_0) = \left\{ p \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [-1, 1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \geq 0 \right\}.$$

8. Soit $x_0 \in]-1, 1[$. Montrer que le résultat de la question 4 est toujours valable en supposant uniquement u dérivable en x_0 .
9. Soit $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $D^+u(x_0) \neq \emptyset$. Démontrer que $D^+u(x_0)$ est un intervalle fermé.
10. On suppose dans cette question que u est concave sur $[-1, 1]$. Soit $x_0 \in]-1, 1[$.

(a) Soient y_1 et y_2 dans $[-1, 1] \setminus \{x_0\}$ avec $y_1 < y_2$. Prouver que

$$\frac{u(y_1) - u(x_0)}{y_1 - x_0} \geq \frac{u(y_2) - u(x_0)}{y_2 - x_0}.$$

(b) Montrer que

$$\lim_{y \rightarrow x_0^-} \frac{u(y) - u(x_0)}{y - x_0} := \ell^- \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow x_0^+} \frac{u(y) - u(x_0)}{y - x_0} := \ell^+$$

sont bien définies et que $D^+u(x_0) = [\ell^+, \ell^-]$.

(c) Démontrer que

$$D^+u(x_0) = \{p \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [-1, 1], u(x) \leq u(x_0) + p(x - x_0)\}.$$

En déduire que u admet un maximum en x_0 si et seulement si $0 \in D^+u(x_0)$.

Partie III

Soit $(x, p) \mapsto H(x, p)$ une fonction continue sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une fonction continue croissante $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant $\omega(0) = 0$, telle que, pour tous $x, y \in [-1, 1]$, et pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$|H(x, p) - H(y, p)| \leq \omega(|x - y|(1 + |p|)). \quad (4)$$

On dit que $u \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ est une **sur-solution** de (1) si pour tout $x \in]-1, 1[$, pour tout $p \in D^-u(x)$,

$$u(x) + H(x, p) \geq 0.$$

On dit que $u \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ est une **sous-solution** de (1) si pour tout $x \in]-1, 1[$, pour tout $p \in D^+u(x)$,

$$u(x) + H(x, p) \leq 0.$$

11. (a) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ vérifie

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad u(x) + H(x, u'(x)) = 0,$$

alors u est sur-solution et sous-solution de (1).

(b) Montrer que si u est à la fois sur-solution et sous-solution de (1), alors en tout point $x \in]-1, 1[$ au voisinage duquel u est de classe \mathcal{C}^1 , on a

$$u(x) + H(x, u'(x)) = 0.$$

On souhaite démontrer que si u est une sous-solution et v une sur-solution de (1) tels que $u(y) \leq v(y)$ pour $y \in \{-1, 1\}$, alors $u \leq v$ sur $[-1, 1]$.

Dans les questions 12 à 15, on suppose donc par l'absurde qu'il existe $y_0 \in [-1, 1]$ pour lequel $u(y_0) > v(y_0)$.

12. Montrer que la fonction $u - v$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ en un point $x_0 \in]-1, 1[$ et $M := \max_{x \in [-1, 1]} (u(x) - v(x)) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$ vérifiant

$$|x - y| \leq \sqrt{2(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)}\eta,$$

on a

$$|u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)| < \frac{M}{2} \quad \text{et} \quad \omega(|x - y| + 2|v(x) - v(y)|) < \frac{M}{2}$$

où ω est la fonction intervenant en (4).

Pour un paramètre η obtenu grâce à la question précédente, on considère la fonction $\Phi_\eta : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\Phi_\eta(x, y) = u(x) - v(y) - \frac{|x - y|^2}{2\eta}.$$

13. Démontrer que Φ_η atteint son maximum sur $[-1, 1]^2$ en un point $(x_\eta, y_\eta) \in [-1, 1]^2$ tel que $\Phi_\eta(x_\eta, y_\eta) \geq M$.

14. (a) Montrer que

$$|x_\eta - y_\eta| \leq \sqrt{2(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)}\eta.$$

(b) En déduire que $|x_\eta| \neq 1$ et $|y_\eta| \neq 1$.

(c) Conclure que

$$\frac{x_\eta - y_\eta}{\eta} \in D^+u(x_\eta) \cap D^-v(y_\eta).$$

15. Prouver que

$$u(x_\eta) - v(y_\eta) \leq \omega(|x_\eta - y_\eta| + 2|v(x_\eta) - v(y_\eta)|)$$

et obtenir une contradiction. Conclure.

16. (a) Calculer le sur-différentiel et le sous-différentiel de la fonction u_0 de la question 3 pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$.

(b) Montrer que

$$D^+u_0(0) = [-e^{-1}, e^{-1}] \quad \text{et} \quad D^-u_0(0) = \emptyset.$$

(c) Vérifier que u_0 est sur-solution et sous-solution de (1) pour $H(x, p) = |p|$.

(d) Qu'en est-il de u_1 ?

(e) En déduire que u_0 est l'unique fonction continue vérifiant $u_0(-1) = u_0(1) = -1$ et qui soit sur-solution et sous-solution de (1) pour $H(x, p) = |p|$.