DEVOIR SURVEILLE 7*

Notations.

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé canonique $\mathcal{R}$, d'origine O.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes ; les parties II et III utilisent les notations $R(z)$ et $V_n(z)$ introduites dans la première partie.

I. Première partie.

I.A. Soit z un nombre complexe, de partie réelle x et de partie imaginaire y, tels que $(x, y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$. On note

$$\theta(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \text{et} \quad R(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{2(Re(z) + |z|)}}$$

I.A.1 Justifier que θ et R sont bien définis.

I.A.2 Lorsque z vaut successivement $z_1 = 4$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$, calculer $R(z)$, $\theta(z)$ et $(R(z))^2$.

I.A.3 Vérifier que $\theta(z) \in]-\pi, \pi[$ et que $R(z) \in \mathcal{P} = \{Z \in \mathbb{C}/\ Re(Z) > 0\}$.

I.A.4 Représenter sur une figure le cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon $|z|$ et les points M d'affixe z et B d'affixe $-|z|$.
En considérant des angles bien choisis, montrer que

$$\theta(z) = \text{Arg}(z) = 2\text{Arg}(z + |z|)$$

où $\text{Arg}(z)$ désigne la détermination proncipale de l'argument du nombre complexe z.

I.A.5 Déterminer $(R(z))^2$, $\theta \circ R(z)$ et $|z|^{1/2}e^{i\theta(z)/2}$ en fonction de z, $R(z)$ et $\theta(z)$.

I.A.6 Résoudre l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

I.A.7 En déduire que R est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans $\mathcal{P}$. Préciser sa bijection réciproque.

Dans la suite du problème, on prolonge R à $\mathbb{C}$ en posant $R(x) = i\sqrt{|x|}$ si $x \in \mathbb{R}^-$.

I.B. Soient a, b deux nombres complexes tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On dit qu'une suite complexe $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(E_{a,b})$ si l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + bu_n$$

I.B.1 On suppose que $a^2 + b \neq 0$. On note $d = R(a^2 + b)$. On appelle W la suite $W = ((a + d)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et W' la suite $W' = ((a - d)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \text{Vect}(W, W')$.
Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ en fonction de d, W et W'.

I.B.2 On suppose que $a^2+b=0$ et $a \neq 0$. On note W et W' les suites $W=(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $W'=(na^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que U vérifie $E_{a,b}$ si et seulement si $U \in \mathrm{Vect}(W,W')$.
Déterminer U vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $u_0=0$ et $u_1=1$ en fonction de a, W et W'.

Dans la suite du problème, on note :
- $U(a,b) = (U_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite vérifiant $E_{a,b}$ et les conditions initiales $U_0(a,b)=0$ et $U_1(a,b)=1.$;
- $V_n(z) = U_{n+1}(z,-1)$ pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

I.B.3 Expliciter $V_1(z)$, $V_2(z)$ et $V_3(z)$.

I.B.4 Montrer que, pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$V_n(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (2z)^{n-2j}(-1)^j \qquad (I.1)$$

II. Deuxième partie.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note C_z (respectivement Ω_z) l'ensemble des points du plan d'affixe complexe Z tels que $|Z(Z-2z)|=1$ (respectivement $|Z(Z-2z)|<1$).

II.A.

II.A.1 Justifier que Ω_z est une partie bornée du plan. Est-elle ouverte ? Fermée ? Compacte ?

II.A.2 Justifier que l'origine O est un point intérieur à Ω_z.

II.B. On reprend dans cette question la notation R introduite dans la première partie à la question **I.A**.

II.B.1 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \neq 1$. On note

$$r = |R(z^2-1)|,\ s = |z + R(z^2-1)|,\ t = |z - R(z^2-1)|,\ h = \max(s,t)$$

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|V_n(z)| \leq \frac{h^{n+1}}{r}$.

II.B.2 Que dire du rayon de convergence de la série entière $Z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)Z^n$?

On note g_z sa somme.

II.B.3 Lorsque cela a un sens, calculer $(1-2zZ+Z^2)g_z(Z)$.

II.B.4 Déterminer l'ensemble de définition D_z de la fonction $Z \mapsto \frac{1}{1-2zZ+Z^2}$.

II.B.5 Montrer qu'il existe un disque ouvert non vide Δ de centre O inclus dans Ω_z tel que

$$\forall Z \in \Delta,\ \frac{1}{1-2zZ+Z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z)Z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} (Z^p(2z-Z)^p)$$

II.B.6 En déduire que la fonction de la variable réelle x

$$G_z \ : \ x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} (x^p(2z-x)^p)$$

admet un développement limité à tout ordre en 0. On le note

$$G_z(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad [x \to 0]$$

Déterminer les coefficients a_k pour $k \in \mathbb{N}$.

II.B.7 Retrouver alors la relation $(I.1)$.

III. Troisième partie.

On note :
- α un réel tel que $\alpha > -1/2$;
- E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonction de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles ;
- F_n le sous-espace de E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$;
- φ_α l'application qui à toute fonction y de E associe la fonction

$$\varphi_\alpha(y) \ : \ t \mapsto (1-t^2)y''(t) - (2\alpha+1)ty'(t)$$

- S_α l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$S_\alpha(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \, dt$$

III.A.

III.A.1 Vérifier que S_α est un produit scalaire sur E.

III.A.2 Justifier que φ_α est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

III.A.3 Montrer que

$$\forall (f, g) \in E^2, \ S_\alpha(\varphi_\alpha(f), g) = S_\alpha(f, \varphi_\alpha(g))$$

On pourra calculer la dérivée de $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} f'(t)$.

III.B. Soit $n \in \mathbb{N}$.

III.B.1 Justifier que φ_α induit sur F_n un endomorphisme et que cet endomorphisme induit (encore noté φ_α) est diagonalisable.

III.B.2 Montrer qu'il existe une base de F_n constituée de vecteurs propres de φ_α de degrés deux à deux distincts.

III.B.3 Vérifier que deux vecteurs propres de φ_α de degrés distincts sont associés à deux valeurs propres distinctes.

III.B.4 Justifier que deux vecteurs propres de φ_α de degrés distincts sont orthogonaux.

III.B.5 Montrer que tout vecteur propre de φ_α de degré supérieur ou égal à 1 s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

III.C. Dans cette partie, on suppose $\alpha = 1$. On note $\|.\|$ la norme associée à S_1.

III.C.1 Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme vecteur propre de φ_1 de degré k, de norme 1 et de coefficient dominant positif. On le note T_k.

III.C.2 Soit $t \in]0,\pi[$. Montrer que la fonction

$$H_t \ : \ x \mapsto \frac{1}{1-2x\cos(t)+x^2}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$.

III.C.3 En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,\pi[,\ V_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}$$

III.C.4 En dérivant deux fois la fonction $t \mapsto \sin(t)V_n(\cos(t)) - \sin((n+1)t)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est vecteur propre de φ_1.

III.C.5 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n et T_n sont proportionnels. Expliciter le coefficient de proportionnalité.

III.C.6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n.