DEVOIR SURVEILLE 6 : un corrigé

Exercice

Le but de cet exercice est de voir si p divise $2^{21}-1$ pour différentes valeurs de p premier.

1. Si $p=2$, comme p divise 2^{21}, mais ne divise pas 1, $\boxed{p \text{ ne divise pas } 2^{21}-1.}$
2. Dans cette question, $p=3$. Alors dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\overline{2}=\overline{-1}$. Donc $\overline{2}^{21}=\overline{-1}^{21}=\overline{-1}$. Comme $\overline{-1}\neq\overline{1}$, $\overline{2}^{21}\neq\overline{1}$ et donc $\boxed{p \text{ ne divise pas } 2^{21}-1.}$
3. Dans cette question, $p=7$. On se place dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
   (a)

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$
x^3	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$

   (b) Le tableau précédent donne $\overline{2}^3=\overline{1}$, donc $(\overline{2}^3)^7=\overline{1}^7=\overline{1}$. Il vient alors $\overline{2}^{21}=\overline{1}$. Donc $\boxed{p \text{ divise } 2^{21}-1.}$

   (c) Par le théorème d'Euler, pour $x\neq\overline{0}$ $\boxed{\text{la ligne des } x^6 \text{ est remplie de } \overline{1}.}$ Pour $x=\overline{0}$, $x^6=\overline{0}$.

   (d) $\overline{6}^2=\overline{1}$, donc $(\overline{6}^2)^{16}=\overline{1}^{16}$ i.e. $\overline{6}^{32}=\overline{1}$ et finalement, $\overline{6}^{33}=\overline{6}$.
   $\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } 6^{33} \text{ par 7 est donc 6.}}$
4. Par le théorème d'Euler, comme 11 est premier et premier avec 2, $2^{10}\equiv 1\ [11]$. On a alors $2^{20}\equiv 1\ [11]$ et finalement $2^{21}\equiv 2\ [11]$. Donc $\boxed{11 \text{ ne divise pas } 2^{21}-1.}$

Problème

Autour de la transformée de Laplace

Partie I : application à la résolution d'une équation différentielle

1. Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$.
   (a) Soit $s\in\Lambda(f)$. Soit $s'\in\mathbb{R}$ tel que $s'>s$. Pour $t\in\mathbb{R}_+$,
   $$|f(t)e^{-s't}|=|f(t)e^{-st}e^{-(s'-s)t}|=|f(t)e^{-st}|e^{-(s'-s)t}.$$
   Or $s'>s$, donc $-(s'-s)t\leq 0$: $e^{-(s'-s)t}\leq 1$ et $|f(t)e^{-s't}|\leq|f(t)e^{-st}|$. Comme $s\in\Lambda(f)$, $t\mapsto f(t)e^{-st}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, $t\mapsto f(t)e^{-s't}$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Finalement, $\boxed{s\in\Lambda(f).}$

   (b) Supposons l'ensemble $\Lambda(f)$ non vide.
   Soient s et s' dans $\Lambda(f)$ avec $s<s'$. Soit $t\in[s,s']$. Si $t=s$, alors $t\in\Lambda(f)$,
   si $t>s$, alors par la question précédente, $t\in\Lambda(f)$. Donc $[s,s']\subset\Lambda(f)$ et on en déduit que $\boxed{\Lambda(f) \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.}$
   Soit $s\in\Lambda(f)$. La question précédente montre que $]s,+\infty[\subset\Lambda(f)$, donc
   $\boxed{\Lambda(f) \text{ n'est pas borné à droite.}}$

2. Soit $f \in \Sigma$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > \sigma(f)$.
   Par définition de la borne inférieure, il existe $s \in \Lambda(f)$ tel que $s < x$. Par 1. $x \in \Lambda(f)$. Donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $L(f)(x)$ existe. Donc $\boxed{L(f) \text{ est définie sur }]\sigma(f), +\infty[.}$

3. Soit $f \in \Sigma$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]\sigma(f), +\infty[$.
   • $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto e^{-xt}f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et pour $l \in [\![1, k]\!]$, sa dérivée l-ième est $x \mapsto (-t)^l e^{-xt} f(t)$.
   • $\forall x \in]\sigma(f), +\infty[$, $t \mapsto (-t)^l e^{-xt} f(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (intégrable sur $[0, 1]$ car continue et intégrable sur $[1, +\infty[$, car en choisissant s dans $\Lambda(f)$ tel que $s < x$, on a $|(-t)^l e^{-xt} f(t)| = (t^l e^{-(x-s)t})|f(t)e^{-st}| = o\left(f(t)e^{-st}\right)$ par croissances comparées et comme $t \mapsto f(t)e^{-st}$ est intégrable, par comparaison, $t \mapsto (-t)^l f(t)e^{-xt}$ l'est aussi).
   • $\forall x \in]\sigma(f), +\infty[$, $t \mapsto (-t)^k e^{-xt} f(t)$ est continue et sur $\mathbb{R}_+$.
   • Soit $[a, b] \subset]\sigma(f), +\infty[$. Soit $x \in [a, b]$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
   $$|(-t)^k e^{-xt} f(t)| \leq t^k e^{-at} |f(t)|.$$
   On pose $\varphi_{a,b} : t \mapsto t^k e^{-at}|f(t)|$. Elle est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, comme précédemment, car il existe $s \in \Lambda(f)$ tel que $s < a$...
   On peut donc appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre : $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]\sigma(f), +\infty[$, donc $\boxed{L(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]\sigma(f), +\infty[}$
   et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $\boxed{L(f)^{(n)} = L(g_n) \text{ avec } g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto (-t)^n f(t).}$
   Lors de la démonstration précédente, on a montré que $\Lambda(f) \subset \Lambda(g_n)$ et donc que $\sigma(g_n) \leq \sigma(f)$, donc $L(g_n)$ est bien définie sur $]\sigma(f), +\infty[$.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. On suppose que $f \in \Sigma$ et $f' \in \Sigma$. On pose $\beta = \text{Max}(\sigma(f), \sigma(f'))$. Soit $x \in]\beta, +\infty[$.
   $L(f')(x)$ et $L(f)(x)$ sont définis et $L(f')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f'(t)dt = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-xt} f'(t)dt$.
   Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u = f$ et $v : t \mapsto e^{-xt}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b]$. Par intégration par parties,
   $$\int_0^b e^{-xt} f'(t)dt = \left[f(t)e^{-xt}\right]_0^b - \int_0^b -xe^{-xt} f(t)dt = f(b)e^{-xb} - f(0) + x \int_0^b e^{-xt} f(t)dt.$$
   Comme les deux intégrales convergent lorsque b tend vers $+\infty$, par linéarité, $f(b)e^{-xb}$ possède une limite, notée ℓ, lorsque b tend vers $+\infty$. Mais comme $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\ell = 0$. On peut alors passer à la limite lorsque b tend vers $+\infty$ dans la dernière égalité, il vient
   $$\boxed{L(f')(x) = -f(0) + xL(f)(x).}$$

5. (a) Posons $f : t \mapsto \sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.
   Si $\omega = 0$, $f = 0$, $\Lambda(f) = \mathbb{R}$ et $\boxed{\sigma(f) = -\infty.}$ $L(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{L(f) = 0.}$
   Si $\omega \neq 0$, quitte à changer ω en $-\omega$, par parité de sinus et linéarité de L, on peut supposer que $\omega > 0$.
   $\mathbb{R}_+^* \subset \Lambda(f)$ car pour $s > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)e^{-st}| = |\sin(\omega t)e^{-st}| \leq e^{-st}$ et $t \mapsto e^{-st}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par continuité pour $[0, 1]$ et par comparaison à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$). Par comparaison, $t \mapsto f(t)e^{-st}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   $0 \notin \Lambda(f)$ car f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$I(x) = \int_0^x |f(t)| = \int_0^x |\sin(\omega t)|dt \geq \int_0^{\lfloor \frac{x\omega}{\pi} \rfloor \frac{\pi}{\omega}} |\sin(\omega t)|dt$$

$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x\omega}{\pi} \rfloor - 1} \int_{k\frac{\pi}{\omega}}^{(k+1)\frac{\pi}{\omega}} |\sin(\omega t)| dt$$

Par changement de variable $t \mapsto \omega t$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x\omega}{\pi} \rfloor - 1} \int_0^{\pi} |\sin(u)| \frac{1}{\omega} du$$

$$I(x) \geq \frac{1}{\omega} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x\omega}{\pi} \rfloor - 1} \int_0^{\pi} |\sin(u)| du = \frac{2}{\omega} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x\omega}{\pi} \rfloor - 1} 1$$

$$I(x) \geq \frac{2}{\omega} \lfloor \frac{x\omega}{\pi} \rfloor$$

Par minoration, $I(x)$ diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et donc $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ diverge. Par la question 1, pour tout $s \in \mathbb{R}_-^*$, $s \notin \Lambda(f)$. Finalement, $\Lambda(f) = \mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\sigma(f) = 0}$. $L(f)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(\omega t) dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-\mathrm{x}+\mathrm{i}\omega)\mathrm{t}} \mathrm{dt}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{x} - \mathrm{i}\omega}\right).$$

D'où

$$\boxed{L(f)(x) = \frac{\omega}{x^2 + \omega^2}.}$$

On remarquera que cette expression est encore valable pour $\omega = 0$, et pour $\omega < 0$, par parité de sinus et linéarité de L.

(b) Posons $g : t \mapsto \cos(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.
Si $\omega = 0$, $g = 1$, $\Lambda(g) = \mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\sigma(g) = 0.}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(g)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$. $\boxed{L(g)(x) = \frac{1}{x}.}$
Si $\omega \neq 0$, comme précédemment, $\boxed{\sigma(g) = 0}$ et $f' = \omega g$, comme $\omega \neq 0$, $\sigma(f') = \sigma(g) = 0$ est fini. 4. donne alors, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0)$, i.e. $L(\omega g)(x) = x\frac{\omega}{x^2+\omega^2} - 0$. Par linéarité de L et comme $\omega \neq 0$,

$$\boxed{L(g)(x) = \frac{x}{x^2 + \omega^2}.}$$

Notons que ce résultat est encore valable pour $\omega = 0$.

(c) Posons $h : t \mapsto t\sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.
Si $\omega = 0$, $h = 0$, $\Lambda(h) = \mathbb{R}$ et $\boxed{\sigma(h) = -\infty.}$ $L(h)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{L(h) = 0.}$
Si $\omega \neq 0$, quitte à changer ω en $-\omega$, par parité de sinus et linéarité de L, on peut supposer que $\omega > 0$.
$\mathbb{R}_+^* \subset \Lambda(f)$ car pour $s > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|h(t)e^{-st}| = |t\sin(\omega t)e^{-st}| \leq te^{-st}$. Donc $|t^2 h(t)e^{-st}| \leq t^3 e^{-st}$ et par croissances comparées, $t^2 h(t)e^{-st}$ converge vers 0 en $+\infty$, $t \mapsto h(t)e^{-st}$ est donc négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, d'où l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$. On récupère l'intégrabilité de $t \mapsto h(t)e^{-st}$ sur $[0, 1]$ par continuité. Finalement, $t \mapsto h(t)e^{-st}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
$0 \notin \Lambda(h)$ car $t \mapsto t\sin(\omega t)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J(x) = \int_0^x |t\sin(\omega t)| dt = \int_0^x t|\sin(\omega t)| dt \geq \int_0^x t\sin^2(\omega t) dt.$$

$$J(x) \geq \int_0^x t\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt \geq \frac{1}{2}\int_0^x tdt - \frac{1}{2}\int_0^x t\cos(2\omega t)dt.$$

Par intégration par parties, avec $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$,

$$J(x) \geq \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\left[\frac{t\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^x - \int_0^x \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}dt\right)$$

$$J(x) \geq \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2\omega x)}{4\omega} + \frac{1}{4\omega}\left[-\frac{\cos(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^x$$

$$J(x) \geq x^2\left(\frac{1}{4} - \frac{\sin(2\omega x)}{4\omega x} - \frac{\cos(2\omega x)}{8\omega^2 x^2} + \frac{1}{8\omega^2x^2}\right).$$

Le facteur entre parenthèses tend vers $\frac{1}{4}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc, par minoration, $J(x)$ diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Comme précédemment, $\Lambda(h) = \mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\sigma(h) = 0.}$
Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $h(t) = -(-t)f(t) = -\tilde{g}(t)$. Comme $f \in \Sigma$, 3. donne $L(f)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $L(f)' = L(\tilde{g}) =)L(h)$ par linéarité de L. D'où $L(h) = -L(f)'$ et finalement, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{L(h)(x) = \frac{2\omega x}{(x^2+\omega^2)^2}.}$$

(d) On pose $i : t \mapsto e^{t^2}$. Soit $s \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $i(t)e^{-st} = e^{t^2}e^{-st} = e^{t(t-s)} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc $t \mapsto i(t)e^{-st}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. $\boxed{\Lambda(i) = \emptyset : L(i) \text{ n'est pas définie.}}$

6. (a) Soit $f \in \Sigma$. Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > \sigma(f)$ et $a > 0$. Alors $x + a > \sigma(f)$

$$L(f)(x+a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+a)t}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-xt}f(t)dt.$$

Or $u \mapsto e^{-xu}f(u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$: par le théorème fondamental, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $h'(t) = e^{-xt}f(t)$. Comme $t \mapsto e^{-at}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, comme $e^{-at}h(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ car $e^{-at} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et $h(t) \underset{t\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} e^{-xu}f(u)du$ puisque $x > \sigma(f)$ et comme $e^{-at}h(t) \underset{t\to 0^+}{\to} 0$ car $e^{-at} \underset{t\to 0^+}{\to} 1$ et $h(t) \underset{t\to 0^+}{\to} 0$, par intégration par parties $\int_0^{+\infty} e^{-at}h'(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} -ae^{-at}h(t)dt$ sont de même nature. Comme la première converge, les deux convergent et $\int_0^{+\infty} e^{-at}h'(t)dt = -\int_0^{+\infty} -ae^{-at}h(t)dt$, i.e.

$$\boxed{L(f)(x+a) = a\int_0^{+\infty} e^{-at}h(t)dt.}$$

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par changement de variable, $\int_0^1 u^n h(-\ln(u))du$ est de même nature que $\int_0^{+\infty}(e^{-t})^n h(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)dt$ ($t \mapsto e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$). La question précédente donne, avec $a = n+1$ que la dernière intégrale existe, donc celle de départ aussi et

$$\int_0^1 u^n h(-ln(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}h(t)dt = \frac{1}{n+1}L(f)(x+n+1) = 0.$$

On a donc montré que $\boxed{\int_0^1 u^n h(-\ln(u))du \text{ existe et vaut } 0.}$

ii. h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et possède une limite finie en $+\infty$, donc $u \mapsto h(-\ln(u))$ est prolongeable par continuité à $[0,1]$. On note $\tilde{h}$ ce prolongement. On applique alors le théorème de Weierstrass à $\tilde{h}$: il existe une suite de fonctions polynomiales (p_n) qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\tilde{h}$. On montre alors que $(p_n\tilde{h})$ converge uniformément vers $\tilde{h}^2$ donc $\int_0^1 p_n\tilde{h}$ converge vers $\int_0^1 \tilde{h}^2$. Or pour tout n, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 p_n\tilde{h} = 0$. D'où, par unicité de la limite, $\int_0^1 \tilde{h}^2 = 0$. Mais $\tilde{h}^2$ est continue et positive, donc elle est nulle sur $[0,1]$ et finalement, h est nulle sur $\mathbb{R}_+$. Donc sa dérivée est nulle aussi, i.e. pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xu}f(u) = 0$. Comme une exponentielle n'est jamais nulle, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $f(u) = 0$, i.e. $f = 0$ et $\boxed{L \text{ est injective.}}$

7. (a) f_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $f_1''(t) = 2\cos(t) - f_1(t)$. Or $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto f_1(t)$ sont continues. Par linéarité, f_1'' est continue, i.e. $\boxed{f_1 \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

   (b) $f_1'' = 2g - f_1$, avec $g = \cos$. $\sigma(g) = 0$. Pour $s > \max(0, \sigma(f_1))$, $s \in \Lambda(f_1'') \neq \emptyset$: $f_1'' \in \Sigma$. Donc $\sigma(f_1'') \leq \max(0, \sigma(f_1))(= \beta)$. Pour $x > \beta$, $L(f_1)(x)$, $L(g)(x)$ et $L(f_1'')(x)$ sont définis et par 4. ($f_1'' \in \Sigma$ et $f_1' \in \Sigma$) $L(f_1'')(x) = xL(f_1')(x) - f_1'(0) = xL(f_1')(x) - 1$. Mais par 4. ($f_1 \in \Sigma$ et $f_1' \in \Sigma$) $L(f_1')(x) = xL(f_1)(x) - f_1(0) = xL(f_1')(x)$. Il reste donc
   $L(f_1'')(x) = x^2L(f_1)(x) - 1$. Or $L(f_1'')(x) = 2L(g)(x) - L(f_1)(x)$ et $L(g)(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (5.b. avec $\omega = 1$). Il vient alors

$$\boxed{L(f_1)(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}.}$$

   (c) Avec 5.a. ($\omega = 1$) et 5.c. ($\omega = 1$) on reconnaît pour $x > \beta \geq 0$, $L(f_1)(x) = L(h)(x) + L(f)(x)$, où $h : t \mapsto t\sin(t)$ et $f : t \mapsto \sin(t)$. Donc $L(f_1)(x) = L(h+f)(x)$ ou encore
   $L(f_1 - h - f)(x) = 0$. $L(f_1 - h - f)$ est nulle sur $]\beta, +\infty[$, ce qui suffit (cf 6.) pour conclure $f_1 - h - f = 0$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_1(t) = t\sin(t) + \sin(t)$. Or $t \mapsto t\sin(t) + \sin(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est solution de (P), donc par unicité, $\boxed{f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t\sin(t) + \sin(t).}$

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de $S = \{f \in \Sigma \mid \sigma(f) \leq 0\}$.

1. I.2. donne $L(f)$ définie sur $]\sigma(f), +\infty[$, comme $\sigma(f) \leq 0$, $\mathbb{R}_+^* \subset]\sigma(f), +\infty[$. Donc
   $\boxed{L(f) \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$
2. On suppose de plus, dans cette question, que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

   (a) $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leq M$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$ et $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable ($f \in \Sigma$ et $x > \sigma(f)$). Donc

$$|L(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}|f(t)|dt.$$

   Comme $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ par croissances comparées, car $x > 0$)

$$|L(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} Me^{-xt}dt \leq \frac{M}{x}.$$

   Comme $\frac{M}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, par domination, $\boxed{L(f)(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0.}$

(b) **Théorème de la valeur initiale**
On suppose, de plus, que f est de classe $\mathcal{C}^1$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt}f'(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue et f' étant bornée, elle est négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ par croissances comparées), donc $x \in \Lambda(f')$: $f' \in \Sigma$ et $\sigma(f') \leq 0$. On peut appliquer I.4. et $\beta \leq 0$ (car $\sigma(f)$ et $\sigma(f')$ sont négatifs). Donc pour tout $x > 0 \geq \beta$

$$L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0).$$

Or $f' \in S$ ($f \in \Sigma$ et $\sigma(f') \leq 0$) et f' est bornée, la question précédente donne $L(f')(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} xL(f)(x) = f(0).}$

3. **Théorème de la valeur finale**
On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel.

(a) Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [A, +\infty[$, $|f(t) - \ell| \leq 1$.
Donc, pour tout $t \in [A, +\infty[$, $|f(t)| \leq 1 + |\ell|$.
Or f est continue : donc f est bornée sur le segment $[0, A]$. Il existe donc $N \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [0, A]$, $|f(t)| \leq N$. On pose alors $M = \max(N, 1 + |\ell|)$. Alors $M \in \mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Ou bien $t \in [0, A]$ et $|f(t)| \leq N \leq M$. Ou bien $t \in [A, +\infty[$ et $|f(t)| \leq 1 + |\ell| \leq M$. Dans tous les cas, $|f(t)| \leq M$: $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.}$

(b) Soit $x > 0$. $xL(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)xdt$. On effectue le changement de variable $u = xt$, avec $t \mapsto xt$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On obtient alors,

$$\boxed{xL(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) du.}$$

(c) On va appliquer le théorème de convergence dominée à la dernière intégrale.
Pour tout $x > 0$, $u \mapsto e^{-u}f\left(\frac{u}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Si $u > 0$, alors $f\left(\frac{u}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\to} \ell$ et si $u = 0$, $f\left(\frac{u}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\to} f(0)$. La fonction, qui à u associe ℓ si $u > 0$ et $f(0)$ si $u = 0$ est une fonction continue par morceaux.
Pour $x > 0$ et pour $u \geq 0$, $|e^{-u}f\left(\frac{u}{x}\right)| \leq Me^{-u}$ avec les notations de a.. On pose donc φ $u \mapsto Me^{-u}$. φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} xL(f)(x) = \ell.}$

(d) On suppose que $\ell \neq 0$. Alors la question précédente donne $\boxed{L(f)(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\ell}{x}.}$

4. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.

(a) Posons $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $R(x) = I - \int_0^x f(t)dt$. Or f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème fondamental de l'analyse donne $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est f. Donc $\boxed{R \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } R' = -f.}$
$R(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc II.3.a. donne R bornée. Comme R est continue sur $\mathbb{R}_+$, $R \in S$. R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $R' = -f \in S$ ($\Lambda(f) = \Lambda(-f)$). On peut donc appliquer I.4 à R et pour $x > 0 \geq \beta$.

$$L(R')(x) = xL(R)(x) - R(0)$$

donc

$$L(-f)(x) = xL(R)(x) - R(0).$$

Et finalement, par linéarité de L,

$$\boxed{L(f)(x) = R(0) - xL(R)(x).}$$

(b) On fixe $\varepsilon > 0$.
$R(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ assure $\boxed{\text{l'existence de } A \text{ réel positif tel que pour tout } t \geq A, \text{ on ait } |R(t)| \leq \varepsilon.}$
Soit $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
L(f)(x) - R(0) &= -xL(R)(x) = -x\int_0^{+\infty} e^{-xt}R(t)dt \\
|L(f)(x) - R(0)| &\leq x\int_0^{+\infty} e^{-xt}|R(t)|dt \\
|L(f)(x) - R(0)| &\leq x\left(\int_0^{A} e^{-xt}|R(t)|dt + \int_A^{+\infty} e^{-xt}|R(t)|dt\right) \\
|L(f)(x) - R(0)| &\leq x\left(\int_0^{A} |R(t)|dt + \int_A^{+\infty} e^{-xt}\varepsilon dt\right) \\
|L(f)(x) - R(0)| &\leq x\int_0^{A} |R(t)|dt + x\varepsilon\int_A^{+\infty} e^{-xt}dt \\
|L(f)(x) - R(0)| &\leq x\int_0^{A} |R(t)|dt + x\varepsilon\frac{e^{-xA}}{x} \\
|L(f)(x) - R(0)| &\leq x\int_0^{A} |R(t)|dt + \varepsilon e^{-xA}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$|L(f)(x) - R(0)| \leq x\int_0^{A} |R(t)|dt + \varepsilon.$$

(c) $x\int_0^A |R(t)|dt \underset{x\to0^+}{\to} 0$: il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\eta]$, $x\int_0^A |R(t)|dt \leq \varepsilon$. Alors pour $x \in]0,\eta]$, $|L(f)(x) - R(0)| \leq 2\varepsilon$. On a prouvé que $L(f)(x) \underset{x\to0^+}{\to} \int_0^{+\infty} f(t)dt$. Si on pose $\boxed{f(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt}$, alors $L(f)$ est continue en 0 et donc $\boxed{L(f) \text{ se prolonge par continuité en } 0.}$

Partie III : Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ pour t réel strictement positif.

1. f est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to0^+}{\to} 1$, f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc
$\boxed{F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+.}$
Pour $x \geq 1$,

$$F(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

On pose $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$. Elles sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,x]$. Par intégration par parties (sur un segment)

$$F(x) = \int_0^1 f(t)dt + \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

$$F(x) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{\cos(x)}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt \underset{x\to+\infty}{\to} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$. Par linéarité

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)dt + \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|dt = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$. Pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$ et donc $u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|dt$. Avec le changement de variable $u = t - n\pi$, on a alors $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|dt = \int_0^{\pi} |\sin(u)|du = \int_0^{\pi} \sin(u)du = 2$. Il vient donc $u_n \geq \frac{2}{\pi}\frac{1}{n+1}$. Or $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge (série harmonique), comme $\frac{2}{\pi} \neq 0$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{2}{\pi}\frac{1}{n+1}$ diverge et par minoration, $\sum u_n$ diverge. Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\int_0^x |f(t)|dt \geq \int_0^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor \pi} |f(t)|dt$ et donc
   $$\int_0^x |f(t)|dt \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor - 1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)|dt = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor - 1} u_k.$$
   Puisque $\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$ diverge vers $+\infty$ lorsque x diverge vers $+\infty$, par minoration, $\int_0^x |f(t)|dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$
3. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et bornée : $f \in S$. Par II.1. $\boxed{L(f) \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$
4. $L(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$
   $$L(f)'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t)dt = \frac{-1}{1+x^2}$$
   avec I.5.a..
   Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(f)(x) = -\mathrm{Arctan}(x) + K$.
   II.1. donne $L(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ or $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ d'où par unicité de la limite, $0 = -\frac{\pi}{2} + K$, i.e. : $K = \frac{\pi}{2}$. On a donc
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad L(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x).}$$
   On admet que $L(f)(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ell$, comme $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc par linéarité et par unicité de la limite, $\ell = \frac{\pi}{2} - 0$ et donc $\ell = \frac{\pi}{2}$ i.e.
   $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.}$$