DEVOIR SURVEILLE 5 : un corrigé

Exercice 1

1. Soit $x \in G$. x est d'ordre fini r. r divise le cardinal du groupe, donc $2p$. Il vient $\boxed{r \in \{1, 2, p, 2p\}.}$

On va raisonner par l'absurde et supposer qu'il n'y a pas d'élément de G d'ordre p.

2. Supposons que G soit cyclique. Alors il existe x un générateur de G : G est le sous-groupe engendré par x et donc son cardinal est l'ordre de x : $2p$. Montrons que x^2 est d'ordre p : on aura alors une contradiction, puisqu'on a supposé qu'il n'y avait pas d'élément d'ordre p dans G.
$(x^2)^p = x^{2p} = 1$. Donc l'ordre de x^2 divise p. Comme p est premier, ou l'ordre de x^2 vaut 1 ou il vaut p. S'il vaut 1, alors $x^2 = 1$ et x est d'ordre 1 ou 2. Or on a supposé que l'ordre de x est $2p$. Donc $2p = 1$ ou $2p = 2$, ce qui dans les deux cas aboutit à une contradiction, puisque p est premier, donc $p \geq 2$ et donc $2p \geq 4$. Donc l'ordre de x^2 est p, ce qui donne aussi une contradiction. Finalement, $\boxed{G \text{ n'est pas cyclique.}}$

3. Soit $x \in G$. Il reste comme possibilités pour l'ordre de x, 1 ou 2. Dans les deux cas, $\boxed{x^2 = 1.}$

4. Remarquons tout d'abord que tout élément de G est son propre inverse.
Soient x et y dans G. $(xy)^{-1} = xy$. Mais $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. Finalement, $xy = yx$. $\boxed{(G, .) \text{ est commutatif.}}$

5. Si $p = 2$, il existe un élément $x \in G$, $x \neq 1$. Comme $x^2 = 1$, x est d'ordre 2, i.e x est d'ordre p, or on a supposé qu'il n'existait pas d'élément d'ordre p. Finalement, $\boxed{p \geq 3.}$

6. Soit $a \in \tilde{G} \setminus H$.

   (a) Remarquons tout d'abord que $\tilde{G}$ est commutatif (même démonstration que pour G) et que tout élément de $\tilde{G}$ est son propre inverse.
   $1 \in H$ puisque H est un sous-groupe de $\tilde{G}$, donc $H \cup aH$ est non vide.
   Soient x et y dans $H \cup aH$.
   Ou bien x et y sont tous les deux dans H, alors xy^{-1} est dans H puisque H est un sous-groupe de $\tilde{G}$, donc $xy^{-1} \in H \cup aH$.
   Ou bien l'un est dans H et l'autre est dans aH. Par exemple, on suppose que x est dans H et y dans aH. Il existe donc $z \in H$ tel que $y = az$. Alors, $xy^{-1} = xy = xaz = axz$ car $\tilde{G}$ est commutatif. Par ailleurs, x et z étant dans H et H étant un sous-groupe, xz est dans H. Finalement, $xy^{-1} \in aH$ et donc $xy \in H \cup aH$.
   Ou bien x et y sont dans aH. Il existe alors z et t dans H tels que $x = az$ et $y = at$. Alors, $xy^{-1} = xy = azat = a^2zt$ car $\tilde{G}$ est commutatif. Par ailleurs, $a^2 = 1$, donc $xy^{-1} = zt \in H$ car H est un sous-groupe, et donc $xy^{-1} \in H \cup aH$.
   Dans tous les cas, $xy^{-1} \in H \cup aH$. Donc $\boxed{H \cup aH \text{ est un sous groupe de } \tilde{G}.}$

   (b) Soit $x \in H \cap aH$. Alors $x \in H$ et il existe $y \in H$ tel que $x = ay$. Mais alors $a = xy^{-1} \in H$ puisque x et y sont dans H et que H est un sous-groupe, mais on a choisi au départ a dans $\tilde{G} \setminus H$. On a donc une contradiction. $\boxed{H \cap aH = \emptyset.}$

(c) Comme l'union est disjointe, le cardinal de $H \cup aH$ est égal au cardinal de H plus le cardinal de aH. Montrons que le cardinal de aH est celui de H.
Pour cela, posons $\varphi : H \to aH$, $x \mapsto ax$ et montrons que φ est bijective.
Soient x et y tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors $ax = ay$ et comme a est inversible, il vient $x = y$. φ est injective.
Soit $y \in aH$. Il existe $x \in H$ tel que $y = ax = \varphi(x)$. φ est surjective.
On en déduit que φ est bijective et donc, $|aH| = |H|$.
On a donc $|H \cup aH| = |H| + |H|$, i.e. $\boxed{|H \cup aH| = 2|H|.}$

(d) Montrons que $H \cup aH = \tilde{G}$. C'est un sous-groupe de $\tilde{G}$ dont le cardinal est strictement plus grand que le cardinal maximal des sous-groupes stricts de G. Donc $H \cup aH$ n'est pas un sous-groupe strict, i.e. $H \cup aH = \tilde{G}$. Par ce qui précède, $|\tilde{G}| = 2|H|$. Or $|H|$ est une puissance de 2, donc $\boxed{|\tilde{G}| \text{ est aussi une puissance de 2.}}$

7. On en déduit que $|G| = 2^q$ avec q premier. Or $|G| = 2p$, avec p premier. Donc $2^q = 2p$, i.e. $p = 2^{q-1}$. Le seul nombre premier qui soit une puissance de 2 est 2, donc $p = 2$, or on a vu que $p \geq 3$: on a donc une contradiction. Finalement, $\boxed{\text{il existe un élément de } G \text{ d'ordre } p.}$

Exercice 2

1. Soit n un entier naturel non nul. f_n est continue sur I.
$f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $[x \to +\infty]$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison, f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Par ailleurs, f_n est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$. f_n est donc bornée sur $]0, 1]$ et donc y est intégrable. Finalement, $\boxed{f_n \text{ est intégrable sur } I.}$
Notons $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. $I_n = \lim\limits_{X \to +\infty} \int_0^X f_n(x)$. Pour $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^X f_n(x)dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n} - 2\frac{e^{-2nx}}{-2n}\right]_0^X = \left[\frac{e^{-nx} - e^{-2nx}}{-n}\right]_0^X = \frac{-e^{-nX} + e^{-2nX}}{n}$; Cette quantité converge vers 0 par croissances comparées lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement, $\boxed{\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0.}$
Alors $\sum\limits_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge et sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\sum e^{-nx}$ converge car c'est une série géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$ et $\sum e^{-2nx}$ converge car c'est une série géométrique de raison $e^{-2x} \in]0, 1[$. Par linéarité, $\sum f_n(x)$ converge et donc $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum\limits_{n \geq 1} f_n \text{ converge simplement sur } I.}$
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2x})^n.$$
Donc
$$S(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - 2\frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{e^x - 1} - 2\frac{1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x + 1 - 2}{(e^x - 1)(e^x + 1)}.$$
Finalement,
$$\boxed{S(x) = \frac{1}{e^x + 1}.}$$
S est continue sur $\mathbb{R}_+$. $S(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)$ $[x \to +\infty]$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par comparaison, S est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par continuité, S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et donc

$\boxed{S \text{ est intégrable sur } I.}$
On effectue le changement de variable $u = e^x$, avec $u \mapsto \ln(u)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et bijective de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient alors

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u}\frac{1}{u}du = \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{1+u} + \frac{1}{u}\right) du = \lim_{X\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\right]_0^X = \ln 2.$$

Finalement, $\boxed{\int_0^{+\infty} S(x)dx = \ln 2.}$

3. $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx \text{ diverge}}$, sinon, par le théorème d'interversion, on devrait avoir

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx$$

i.e. $\ln 2 = 0$.

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $g : t \mapsto \frac{te^{-tx}}{e^t-1}$. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. $g(x) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc g est intégrable sur $]0, 1]$.
$g(x) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-t(x+1)}$.
Si $x > -1$, $t^2 g(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, g est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Si $x \leq -1$, alors pour $t \geq 1$, $te^{-t(x+1)} \geq t \geq 0$ et $t \mapsto t$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $t \mapsto te^{-t(x+1)}$ n'est pas intégrable et g n'est pas intégrable.
Finalement, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > -1$. Comme g est à valeurs positives, $f(x)$ est définie si et seulement si $x > -1$, i.e. $\boxed{f \text{ est définie sur }]-1, +\infty[.}$

2. Pour tout $x > -1$, $t \mapsto \frac{te^{-tx}}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{te^{-tx}}{e^t-1}$ est continue sur $]-1, +\infty[$.
Soit $[a, b] \subset]-1, +\infty[$. Soit $x \in [a, b]$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $\left|\frac{te^{-tx}}{e^t-1}\right| \leq \frac{te^{-ta}}{e^t-1}$. On pose donc $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{te^{-ta}}{e^t-1}$. $\varphi_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable avec la question 1. en prenant $x = a > -1$.
On peut donc appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre et en déduire que $\boxed{f \text{ est continue sur }]-1, +\infty[.}$

3. On utilise l'extension théorème de convergence dominée.
Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto \frac{te^{-tx}}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{te^{-tx}}{e^t-1}$ converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Enfin, pour $x > 0$ et pour $t > 0$, on a $|\frac{te^{-tx}}{e^t-1}| \leq \frac{t}{e^t-1}$ qui est bien continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf première question avec $x = 0$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que $\boxed{f(x) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.}$

4. Soit $x > 0$. Alors $x - 1 > -1$ et $f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} te^{-tx}dt$ et par intégration par parties, avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{-x}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et les limites en 0 et en $+\infty$ de uv nulles, on a (les deux intégrales convergent car la première converge) :

$$f(x-1) - f(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{-x}dt.$$

Donc $f(x-1)-f(x)=\frac{1}{x^2}$.
On peut écrire, pour $x>-1$, $f(x)-f(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2}$ et pour $n\in\mathbb{N}$,
$f(x+n)-f(x+n+1)=\frac{1}{(x+n+1)^2}$. En sommant sur n allant de 0 à N (avec $N\in\mathbb{N}$), on obtient $f(x)-f(x+N)=\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{1}{(x+n+1)^2}$. Or, le membre de gauche converge vers $f(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$ d'après la question précédente et le membre de droite converge car il s'agit de la somme partielle d'une série convergente (son terme général est positif et équivalent à $\frac{1}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$). En passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, on a alors

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2}.$$

5. On peut aussi écrire, pour $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{e^t-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)t}$ et donc, pour $x>-1$,
$\frac{te^{-tx}}{e^t-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}te^{-t(n+1+x)}$. On utilise alors le théorème d'interversion somme intégrale.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n:\ t\mapsto te^{-t(n+1+x)}$. Chaque f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$).
$\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $t\mapsto\frac{te^{-tx}}{e^t-1}$, qui est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^{+\infty}|f_n|=\int_0^{+\infty}te^{-t(n+1+x)}$. On calcule comme précédemment en faisant une intégration par parties et on obtient : $u_n=\frac{1}{(n+1+x)^2}$, qui est bien le terme général d'une série convergente car positive et équivalente à $\frac{1}{n^2}$ en $+\infty$.
On peut donc appliquer le théorème d'interversion somme-intégrale et on obtient comme précédemment

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1+x)^2}.$$

Problème

Partie I : exemples et contre-exemples

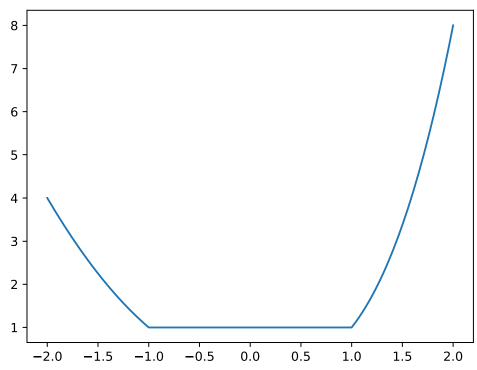
1. Supposons que h puisse d'approcher uniformément sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes (p_n). Chaque p_n possédant une limite en 0^+, le théorème de la double limite donne alors que h possède une limite en 0^+, ce qui n'est pas. Donc
$\boxed{h \text{ ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle }]0,1] \text{ par une suite de fonctions polynômes.}}$
Ici, le théorème de Weierstrass ne s'applique pas car $]0,1]$ n'est pas un segment.

2. Soit N un entier naturel non nul. $\mathcal{P}_N$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, donc $\boxed{\mathcal{P}_N \text{ est fermé.}}$
Par la caractérisation séquentielle des fermés, une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné N est encore une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à N.

3. (a) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $N_1(P)=0$. Alors, pour $x\in[-2,-1]$, $0\le|P(x)|\le 0$, donc $P(x)=0$. P possède une infinité de racines : $P=0$.
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour $x\in[-2,-1]$, $|\lambda P(x)|=|\lambda||P(x)|$. Or $|P(x)|\le N_1(P)$ et $|\lambda|\ge 0$, d'où $|\lambda P(x)|\le|\lambda|N_1(P)$. On peut alors passer à la borne supérieure et on obtient, $N_1(\lambda P)\le|\lambda|N_1(P)$. Si $\lambda=0$, l'égalité $N_1(\lambda P)=|\lambda|N_1(P)$ est claire. Si $\lambda\neq 0$, on a de même $N_1\left(\frac{1}{\lambda}\lambda P\right)\le\left|\frac{1}{\lambda}\right|N_1(\lambda P)$. ou encore $|\lambda|N_1(P)\le N_1(\lambda P)$. Finalement,

$|\lambda|N_1(P) = N_1(\lambda P)$.
Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Pour $x \in [-2,-1]$,
$|(P+Q)(x)| = |P(x)+Q(x)| \leq |P(x)|+|Q(x)| \leq N_1(P)+N_1(Q)$. On peut alors passer à la borne supérieure pour obtenir $N_1(P+Q) \leq N_1(P)+N_1(Q)$.
On a bien montré que $\boxed{N_1 \text{ est une norme sur } \mathbb{R}[X].}$

(b)



f est continue sur le segment $[-2,2]$ car elle est continue sur $[-2,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,2]$ et les limites à droites et à gauches en -1 et 1 sont égales. On peut donc appliquer le théorème de Weierstrass :
$\boxed{\text{il existe une suite de polynômes } (P_n) \text{ qui converge uniformément vers la fonction } f \text{ sur } [-2,2].}$
Pour $x \in [-2,-1]$, $f(x) = x^2$, donc si on note $P = X^2$, on a $f(x) = P(x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$N_1(P_n - P) = \|P_n - f\|_{\infty,[-2,-1]} \leq \|P_n - f\|_{\infty,[-2,2]}.$$

La convergence uniforme de (P_n) vers f sur $[-2,2]$ implique donc la convergence de (P_n) vers P pour la norme N_1.
On montrerait de même que (P_n) converge vers $Q = X^3$ pour la norme N_2.
$\boxed{\text{La limite change donc en fonction de la norme.}}$

Partie II : une application, le théorème des moments

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k, $\int_a^b x^k f(x)dx = 0$.

(a) Soit P une fonction polynôme. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$. On a alors, par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b P(x)f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{N} a_n x^n f(x)dx = \sum_{n=0}^{N} a_n \int_a^b x^n f(x)dx = 0.$$

D'où $\boxed{\int_a^b P(x)f(x)dx = 0.}$

(b) f est continue sur le segment $[a,b]$, on peut donc appliquer le théorème de Weierstrass. Il existe (P_n) une suite de polynômes tels que (P_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors $(P_n f)$ converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$, en effet :

$$\|P_n f - f^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty.$$

On peut donc intervertir limite et intégrale et dire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b P_n(x)f(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx.$$

Mais chaque intégrale $\int_a^b P_n(x)f(x)dx = 0$, donc $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. f^2 est continue et positive sur $[a,b]$, donc $f^2 = 0$, i.e. $\boxed{f = 0.}$

2. Application

(a) φ est symétrique par commutativité de la multiplication des réels.
φ est linéaire à droite par linéarité de l'intégrale.
Pour $f \in E$, $\varphi(f,f) = \int_a^b f(t)^2dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
Enfin, si $f \in E$ vérifie $\varphi(f,f) = 0$, alors $\int_a^b f(t)^2dt = 0$ et f^2 est continue positive d'intégrale nulle, donc elle est identiquement nulle, donc $f = 0$.
Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

(b) Soit $f \in F^\perp$. Alors f est orthogonale à toutes les fonctions polynômes, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(f, X^k) = 0$ ou encore $\int_a^b x^k f(x)dx = 0$. La question précédente montre alors que $f = 0$. Donc $F^\perp \subset \{0\}$ et finalement, $\boxed{F^\perp = \{0\}.}$
$F \oplus F^\perp = F \neq E$: il existe bien des fonctions continues sur $[a,b]$ qui ne sont pas des fonctions polynômes (exp par exemple). Donc $\boxed{F \oplus F^\perp \neq E.}$

3. (a) Soit n un entier naturel, on pose $f_n : x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
$x^2 f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $[x \to +\infty]$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par continuité de f_n sur le segment $[0,1]$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. $\boxed{I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}dx \text{ existe donc bien.}}$
Posons, $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto \frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. uv converge vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées et vers 0 en 0.
Par intégration par parties, I_{n+1} et $\int_0^{+\infty}(n+1)t^n\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}dx$ sont donc de même nature. Comme la première converge, les deux convergent et

$$I_{n+1} = 0 - 0 - \int_0^{+\infty}(n+1)t^n\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}dx$$

i.e.

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i}I_n.}$$

On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $\boxed{I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}}$, puisque $I_0 = \frac{1}{1-i}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(I_n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} sin(x)dx$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin(x)dx = \mathrm{Im}(I_{4k+3})$.
Avec la question précédente, $\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin(x)dx = \mathrm{Im}\left(\frac{(4k+3)!}{(1-i)^{4k+4}}\right)$. Or $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et donc $(1-i)^4 = -4$. Il vient alors, puisque I_{4k+3} est réel

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin(x)dx = 0}$$

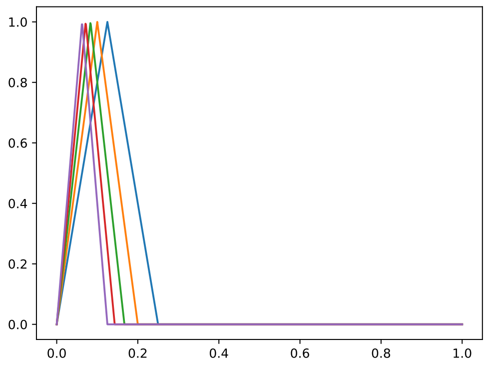
(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variable, $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $u = x^4$, il vient
$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} u^k e^{-\sqrt[4]{u}} \sin(\sqrt[4]{u}) du = 0.$$
On pose donc $\boxed{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ u \mapsto e^{-\sqrt[4]{u}} \sin(\sqrt[4]{u}).}$
$\boxed{f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}_+}$ par composition et multiplication de fonctions continues, $\boxed{f \text{ est non nul}}$
$\left(f\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a pourtant $\boxed{\int_0^{+\infty} u^k f(u) du = 0.}$

(d) La fonction f proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $\mathbb{R}_+$, sinon, on pourrait démontrer, comme en II.1. que $f = 0$.

Partie III : exemple via un théorème de Dini

1. Question préliminaire
Soit $x \in [0,1]$. La fonction g_x est dérivable et sa dérivée est positive sur I. g_x est donc croissante sur I. Or elle vaut $\sqrt{x}$ et $\sqrt{(x)}$: I est donc stable par g_x. (u_n) est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \sqrt{x} \in I$. On en déduit alors que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(x - u_n^2\right) \geq 0$ et donc (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par $\sqrt{x}$, elle converge. Comme g_x est continue sur I, (u_n) ne peut converger que vers un point fixe de g_x. Or, le seul point fixe de g_x est $\sqrt{x}$, donc $\boxed{u_n \text{ converge vers } \sqrt{x}.}$

2. Par exemple, pour $[a,b] = [0,1]$, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2nx$ si $x < \frac{1}{2n}$, $-2nx + 2$ si $\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ et 0 sinon. On adapte sur $[a,b]$ en prenant $g_n : x \mapsto f_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$. On a pour différentes valeurs de n l'allure suivante :



$\boxed{(f_n) \text{ converge simplement vers } 0}$ et pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et donc ne converge pas vers 0 : $\boxed{(f_n) \text{ ne converge pas uniformément vers } 0.}$

3. Application
Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :
$$p_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right).$$

(a) L'étude en III.1. justifier que
$\boxed{\text{la suite } (P_n) \text{ converge simplement vers la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur l'intervalle } [0,1].}$

(b) Le théorème de Dini admis peut s'appliquer ici. (f_n) converge simplement vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ et la limite simple est continue sur $[0,1]$. On a, par ailleurs, vu en III.1. que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(P_n(x))$ est croissante.
$\boxed{\text{La suite } (P_n) \text{ converge uniformément vers la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur l'intervalle } [0,1].}$