DEVOIR SURVEILLE 5

Exercice 1

Soit $(G,.)$ un groupe fini de cardinal $2p$ avec p un nombre premier. On note 1 sont élément neutre. Le but de l'exercice est de montrer que G contient un élément d'ordre p.

1. Soit $x \in G$. x est d'ordre fini r. Montrer que $r \in \{1, 2, p, 2p\}$.

On va raisonner par l'absurde et supposer qu'il n'y a pas d'élément de G d'ordre p.

2. Montrer que G n'est pas cyclique.

3. Montrer que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1$.

4. Montrer que $(G,.)$ est commutatif.

5. Montrer que $p \geq 3$.

6. On veut montrer que tout groupe fini $(\tilde{G},.)$ d'élément neutre 1, tel que pour tout $x \in \tilde{G}$, $x^2 = 1$, a un cardinal qui est une puissance de 2. Pour ce faire, on raisonne par récurrence forte sur le cardinal de $\tilde{G}$. L'initialisation est évidente, puisque 1 est une puissance de 2. On suppose donc que l'hypothèse est vraie pour des groupes de cardinal inférieur ou égal à n et on le prouve pour ceux de cardinal inférieur à $n+1$. Soit $(\tilde{G},.)$ un groupe de cardinal $n+1$ vérifiant pour tout $x \in \tilde{G}$, $x^2 = 1$. Montrons que $n+1$ est une puissance de 2. On s'intéresse à H un sous-groupe de $\tilde{G}$, différent de $\tilde{G}$ et de cardinal maximal. Par hypothèse, quitte à munir H de la loi induite, on sait que le cardinal de H est une puissance de 2. Soit $a \in \tilde{G} \setminus H$.

   (a) Montrer que $H \cup aH$ est un sous groupe de $\tilde{G}$.

   (b) Montrer que $H \cap aH = \emptyset$.

   (c) Quel est le cardinal de $H \cup aH$?

   (d) Conclure.

7. Obtenir une contradiction et conclure.

Exercice 2
On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, f_n est intégrable sur I et calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Que vaut alors la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$?

2. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\int_0^{+\infty} S(x)dx$?

3. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx$.

Exercice 3
Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Pour $x > 0$, déterminer $f(x-1) - f(x)$. En déduire une expression de $f(x)$ sous la forme de la somme d'une série.

5. Pouvait-on obtenir ce résultat autrement ?

Problème
Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a, b]$: si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème.

On pourra admettre qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé, est fermé.

Partie I : exemples et contre-exemples

1. Soit h la fonction définie sur $]0,1]$ par : pour tout $x \in]0,1]$, $h(x) = \frac{1}{x}$.
   Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

2. Soit N un entier naturel non nul. On note $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N. Justifier que $\mathcal{P}_N$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.
   Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

3. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.
   Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :
   $$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad N_1(P) = \sup_{x \in [-2,-1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x \in [1,2]} |P(x)|.$$
   (a) Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est une également.

   (b) On note f la fonction définie sur $[-2,2]$ ainsi :
   $$\forall x \in [-2,-1],\ f(x) = x^2, \quad \forall x \in]-1,1[,\ f(x) = 1, \quad \forall x \in [1,2],\ f(x) = x^3.$$
   Représenter graphiquement cette fonction et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.
   Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

Partie II : une application, le théorème des moments

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k, $\int_a^b x^k f(x)dx = 0$. $\left(\int_a^b x^k f(x)dx \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a,b]\right)$.

   (a) Soit P une fonction polynôme. Que vaut $\int_a^b P(x)f(x)dx$?

   (b) Démontrer que nécessairement f est la fonction nulle.

2. Application
   Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de φ définie pour tout couple (f,g) d'éléments de E par $\varphi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

   (a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

(b) On munit E de ce produit scalaire et on note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a,b]$. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F, i.e. l'ensemble des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de F. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

3. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}dx$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel k, $\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin(x)dx = 0$.

(c) Proposer une fonction f continue sur $[0,+\infty[$, non nulle, et vérifiant, pour tout entier naturel k, $\int_0^{+\infty} u^k f(u)du = 0$.

(d) Expliquer pourquoi la fonction f proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $\mathbb{R}_+$ par une suite de polynômes.

Partie III : exemple via un théorème de Dini

1. Question préliminaire
Soit $x \in [0,1]$. On note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n par :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(x - u_n^2\right) = g_x(u_n).$$
Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer, en fonction du réel x, sa limite.

2. Proposer un exemple de suite (f_n) de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f elle même continue sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) est croissante, i.e. pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [a,b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$. Il s'agit du premier théorème de Dini.

3. Application
Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :
$$p_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right).$$
(a) Justifier que la suite (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

(b) Justifier que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.