DEVOIR SURVEILLE 5

Autour de la transformée de Laplace

L'objet de ce problème est l'étude de la transformée de Laplace. Dans la partie I, on en voit quelques propriétés et on l'utilise pour résoudre une équation différentielle. Dans la partie II, on étudie des comportements asymptotiques de la transformée de Laplace. Enfin, dans la partie III, on l'utilise pour calculer l'intégrale de Dirichlet.

Partie I : application à la résolution d'une équation différentielle

Pour f continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, on note

$$\Lambda(f) = \{s \in \mathbb{R} \mid t \mapsto f(t)e^{-st} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+\}.$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$.
   (a) Montrer que si $s \in \Lambda(f)$, alors pour tout $s' \in \mathbb{R}$ tel que $s' > s$, $s' \in \Lambda(f)$.

   (b) En déduire que si l'ensemble $\Lambda(f)$ est non vide, alors c'est un intervalle non borné à droite.

On appelle alors abscisse de sommabilité de f, l'élément $\sigma(f)$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ défini par :
$\sigma(f) = \mathrm{Inf}(\Lambda(f))$. On s'intéresse à la transformée de Laplace L de f :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt.$$

On note $\Sigma = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+) \mid \sigma(f) \text{ existe dans } \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\}$.

2. Soit $f \in \Sigma$. Montrer que $L(f)$ est définie sur $]\sigma(f), +\infty[$.

3. Soit $f \in \Sigma$. Montrer que $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L(f)^{(n)} = L(g_n)$ avec $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (-t)^n f(t)$.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. On suppose que $f \in \Sigma$ et $f' \in \Sigma$. On pose $\beta = \mathrm{Max}(\sigma(f), \sigma(f'))$.
   Montrer que pour tout $x \in]\beta, +\infty[$, $L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0)$.
   On pourra intégrer sur $[0, b]$ et regarder ce qui se passe lorsque $b \to +\infty$.

5. Déterminer les abscisses de sommabilité et les transformées de Laplace (lorsque cela est possible) des fonctions suivantes.
   (a) $t \mapsto \sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.
   (b) $t \mapsto \cos(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.
   (c) $t \mapsto t\sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.
   (d) $t \mapsto e^{t^2}$.

6. L'objectif de cette question est de démontrer que la transformée de Laplace est une application injective sur Σ.

   (a) Soit $f \in \Sigma$. Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > \sigma(f)$ et $a > 0$. Pour $t \geq 0$, on pose $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u)du$. Montrer que

   $$L(f)(x+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t) dt.$$

   (b) On suppose de plus que $L(f) = 0$.

      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n h(-\ln(u))du$ existe et vaut 0.

      ii. On admet alors que pour tout $u \in]0,1]$, $h(-\ln(u)) = 0$. Conclure.

7. On considère le problème

   $$(P) \qquad y'' + y = 2\cos(t), \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1.$$

   Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution f_1 sur $\mathbb{R}$ de (P).

   (a) Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) On suppose que $f_1 \in \Sigma$ et que $f_1' \in \Sigma$. Montrer que $L(f_1)$ vérifie pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$ que l'on ne cherchera pas à déterminer :

   $$\forall x \in]\beta, +\infty[, \quad L(f_1)(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}.$$

   (c) En déduire une expression de f_1.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de $S = \{f \in \Sigma \mid \sigma(f) \leq 0\}$.

1. Montrer que $L(f)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On suppose de plus, dans cette question, que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

   (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $L(f)$.

   (b) **Théorème de la valeur initiale**
   On suppose, de plus, que f est de classe $\mathcal{C}^1$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   Démontrer que $\lim_{x \to +\infty} xL(f)(x) = f(0)$.

3. **Théorème de la valeur finale**
   On suppose dans cette question que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

   (a) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}+$.

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n L(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x)dx$ où h_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h_n(x) = e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

(c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n L(f)(a_n) = \ell$.

(d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $L(f)(x)$ en 0.

4. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.

   (a) Démontrer que R est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer R'.
   En déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a : $L(f)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.

   (b) On fixe $\varepsilon > 0$.
   Justifier l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geq A$, on ait $|R(t)| \leq \varepsilon$.
   En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|L(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)|dt + \varepsilon.$$

   (c) Démontrer que $L(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ pour t réel strictement positif.

1. Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est bien définie et admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

2. En considérant la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ où $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que $L(f)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $L(f)(x)$ et en déduire ℓ.
   Pour cela on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question **II.3.**) :

$$\text{lorsque } f \text{ dans } S \text{ vérifie } \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lim_{x\to 0^+} L(f)(x) = \ell.$$

   On notera que, par rapport à la question **II.3.**, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = \ell \in \mathbb{R}$.