

DEVOIR SURVEILLE 5*

Notations et objectifs

On désigne par $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} , par $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel des fonctions f continues et intégrables sur \mathbb{R} .

On considère l'application linéaire \mathcal{F} de $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f} \quad \text{où} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt.$$

La fonction \hat{f} est appelée transformée de Fourier de la fonction f .

Après avoir étudié sur des exemples quelques propriétés de la transformée de Fourier dans la première partie, on détermine dans la deuxième partie la transformée de Fourier d'une fonction \mathcal{H}_0 . Dans une troisième partie, indépendante des deux précédentes, on introduit une suite de fonctions (\mathcal{H}_n) dont on détermine la transformée de Fourier dans une quatrième partie.

Partie I

Dans cette partie f désigne une fonction appartenant à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. Justifier l'existence et étudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction \hat{f} .
2. On suppose que la fonction f est à valeurs réelles.
 - (a) Montrer que si f est une fonction paire alors \hat{f} est une fonction paire et à valeurs réelles.
 - (b) Que peut-on dire de \hat{f} si la fonction f est impaire ?
3. On suppose que la fonction \hat{f} est impaire ; montrer qu'il existe un nombre complexe μ , que l'on explicitera, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt.$$

4. **Premier exemple.**

On considère la fonction p définie sur \mathbb{R} par :

$$p(t) = 1 - t \text{ lorsque } t \in [0, 1]$$

$$p(t) = 0 \text{ lorsque } t \in]1, +\infty[$$

$$p(-t) = p(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que p appartient à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(b) Expliciter $\widehat{p}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) La fonction \widehat{p} est-elle de classe \mathcal{C}^1 (resp \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{R} ? Les réponses seront justifiées soigneusement, on pourra utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(d) La fonction \widehat{p} appartient-elle à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

5. **Deuxième exemple.**

Pour tout entier naturel n on considère la fonction E_n définie sur \mathbb{R} par $E_n(t) = |t|^n e^{-|t|}$.

On se propose de déterminer la transformée de Fourier \widehat{E}_n de cette fonction.

On considère la fonction K_n de la variable réelle x définie par :

$$K_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{(-1+ix)t} dt.$$

Pour simplifier l'écriture, on désigne par α le nombre complexe $1 - ix$ et on écrira

$$K_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt.$$

(a) Montrer que $E_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{E}_n(x)$ à l'aide de la partie réelle de K_n .

(b) Exprimer K_n en fonction de n et α (on commencera par établir une relation de récurrence entre K_n et K_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$).

(c) Expliciter $\widehat{E}_0(x)$, $\widehat{E}_1(x)$ et $\widehat{E}_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer qu'il existe une fonction β définie sur \mathbb{N} à valeurs réelles, que l'on explicitera, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{E}_n(x) = \frac{2(n!) \cos((n+1)\text{Arctan}x)}{(1+x^2)^{\beta(n)}}.$$

(e) La fonction \widehat{E}_n appartient-elle à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

6. Soient c et d deux nombres réels tels que $c < d$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(t) = 0$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$; on suppose que la fonction \widehat{f} est impaire.

Montrer que la fonction $(a, b) \mapsto \int_a^b \frac{\widehat{f}(x)}{x} dx$ est bornée lorsque (a, b) décrit $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

(On rappelle et on admettra que l'ensemble $\left\{ \left| \int_a^b \frac{\sin u}{u} du \right|, (a, b) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\right\}$ est borné et on désignera par M sa borne supérieure et que si g est une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$, alors $\int_a^b \left(\int_c^d g(x, t) dt \right) dx$ et $\int_c^d \left(\int_a^b g(x, t) dx \right) dt$ ont un sens et sont égales.)

7. La fonction $x \mapsto \frac{\text{Arctan} x}{x \ln(2+x^2)}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

8. Existe-t-il deux nombres réels c et d , avec $c < d$, et une fonction f continue sur \mathbb{R} telle que $f(t) = 0$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$ et telle que $\widehat{f}(x) = \frac{\text{Arctan}x}{\ln(2+x^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Partie II : transformée de Fourier de \mathcal{H}_0 .

Dans cette partie, on désigne par \mathcal{H}_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $\mathcal{H}_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ et on se propose de déterminer la transformée de Fourier $\widehat{\mathcal{H}}_0$ de \mathcal{H}_0 en utilisant deux méthodes différentes.

1. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; en déduire que \mathcal{H}_0 est intégrable sur \mathbb{R} et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_0(t) dt$.

Première méthode de calcul de $\widehat{\mathcal{H}}_0$.

2. On définit sur \mathbb{R} la suite de fonctions g_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n appartient à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- (b) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.
 - i. Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
 - ii. En déduire une expression simple de $\frac{I_n}{(2n)!}$.
- (c) On considère la série de fonctions $\sum h_n$, où pour $n \in \mathbb{N}$, $h_n : x \mapsto (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$; montrer qu'elle converge simplement sur \mathbb{R} et donner pour $x \in \mathbb{R}$ la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$.
3. Vérifier que pour tout x réel, la fonction, définie sur \mathbb{R} par $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt)$, est intégrable \mathbb{R} .
4. Justifier avec soin l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathcal{H}}_0(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

5. Déduire de ce qui précède une expression simple de $\widehat{\mathcal{H}}_0$ à l'aide des fonctions usuelles.

Deuxième méthode de calcul de $\widehat{\mathcal{H}}_0$.

Pour simplifier l'écriture, on convient de noter φ la fonction $\widehat{\mathcal{H}}_0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt.$$

6. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et donner une expression de φ' .
7. En déduire que φ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (\mathcal{E}).
8. Résoudre (\mathcal{E}). Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et retrouver ainsi le résultat obtenu à la question **II.5.**
9. Déduire de ce qui précède qu'il existe un nombre réel λ_0 que l'on explicitera tel que $\widehat{\mathcal{H}}_0 = \lambda_0 \mathcal{H}_0$.

Partie III : la suite (\mathcal{H}_n) .

On définit sur \mathbb{R} deux suites de fonctions (H_n) et (\mathcal{H}_n) respectivement par : (pour $t \in \mathbb{R}$)

$$H_0(t) = 1 \quad \text{et} \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\mathcal{H}_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

1. Expliciter, pour $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_1(t)$ et $\mathcal{H}_2(t)$.

On suppose dans ce qui suit que $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour simplifier, on note G la fonction définie sur \mathbb{R} par $G : t \mapsto e^{-t^2}$ et $G^{(n)}$ sa dérivée n -ième. En remarquant que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G'(t) = -2tG(t)$ et en dérivant n fois cette égalité, établir une relation entre $H_{n+1}(t)$, $H_n(t)$, $H_{n-1}(t)$, t et n ; en déduire l'expression de $\mathcal{H}_{n+1}(t)$ en fonction de $\mathcal{H}_n(t)$, $\mathcal{H}_{n-1}(t)$, t et n .
3. Soit $t \in \mathbb{R}$.
 - (a) En dérivant la relation $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} G^{(n)}(t)$ obtenir l'expression de $H'_n(t)$ en fonction de $H_n(t)$, $H_{n+1}(t)$ et t .
 - (b) Déduire de ce qui précède l'expression de $H'_n(t)$ en fonction de $H_{n-1}(t)$ et n .
 - (c) Exprimer $\mathcal{H}'_n(t)$ en fonction de $\mathcal{H}_n(t)$, $\mathcal{H}_{n-1}(t)$, t et n .

Partie IV : transformée de Fourier de \mathcal{H}_n .

Dans cette partie, on désigne par \mathcal{H}_n les fonctions définies dans la troisième partie.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. **Détermination de $\widehat{\mathcal{H}}_1$.**

- (a) Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathcal{H}}_1(x)$ en fonction de $\widehat{\mathcal{H}}_0(x)$ et de x .
- (b) Déterminer le nombre complexe λ_1 tel que :

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \lambda_1 \mathcal{H}_1.$$

3. On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n la fonction \mathcal{H}_n est un vecteur propre de l'application linéaire \mathcal{F} définie dans l'introduction.
 - (a) Exprimer $\widehat{\mathcal{H}}_{n+1}$ en fonction de $(\widehat{\mathcal{H}}_n)'$, $\widehat{\mathcal{H}}_{n-1}$ et n (on suppose $n \geq 1$).
 - (b) Etablir par récurrence que pour tout entier naturel n , on a l'égalité :

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_n) = \widehat{\mathcal{H}}_n = \lambda_n \mathcal{H}_n$$

où λ_n désigne un nombre complexe que l'on explicitera.