DEVOIR SURVEILLE 4

Exercice 1
On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'.$$

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.
2. (a) Donner la matrice A de a dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer le rang de A.
3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathcal{B}$, de b et c respectivement.

Partie II : étude de b

1. Montrer que b est bijectif et expliciter $b^{-1}(Q)$ pour tout Q dans E.
2. (a) Montrer que b admet une seule valeur propre et déterminer celle-ci.
   (b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Partie III : étude de c

1. Expliciter C.
2. L'endomorphisme c est-il bijectif ?
3. (a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre 3, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre 3, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.
   (b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Partie IV : étude de f

1. Soit $P \in E$. Expliciter $f(P)$ en fonction de P ou de ses dérivées.
2. En déduire que $(BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 2

Partie I : calcul matriciel

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est diagonalisable et donner $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.
2. Calculer P^{-1}.
3. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : étude de l'entrainement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entrainer au triathlon. Il commence son entrainement par la natation au jour 0.
Son entrainement obéit ensuite aux règles suivantes (valable pour tout entier naturel n) :
• si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
- la natation avec la probabilité $1/5$
- le cyclisme avec la probabilité $1/5$
- la course à pied avec la probabilité $3/5$

• si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
- la natation avec la probabilité $2/5$
- le cyclisme avec la probabilité $3/5$

• si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
- le cyclisme avec la probabilité $1/5$
- la course à pied avec la probabilité $4/5$.

Pour tout entier naturel n, on désigne par :
• A_n l'événement " l'athlète s'entraîne à la natation le jour n" et par a_n la probabilité de A_n.
• B_n l'événement " l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n" et par b_n la probabilité de B_n.
• C_n l'événement " l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n" et par c_n la probabilité de C_n.

1. Que valent a_0, b_0 et c_0 ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$
Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer alors la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :
$$U_{n+1} = AU_n.$$
Exprimer A en fonction de M.
4. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
5. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Exercice 3
On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note
- B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
- R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage".

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
3. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n)$.
   (b) Justifier $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n)$, puis en déduire :
   $$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(S_n) = \frac{2n}{3}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1) = \frac{k+2}{n+3}$.
   (b) En déduire : $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbb{E}(S_n)+2}{n+3}$.
   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Exercice 4
Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(= \frac{\pi^2}{6} \right).$$

Exercice 5
On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,\ q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

1. Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^t\!V_0$.
   (a) Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?
   (b) Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.
   (c) i. Calculer A_0U_0.
      ii. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
      iii. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.
2. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   (a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.
   Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} l_1 \cdots l_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.
   (b) Vérifier que $LC = \mathrm{Tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$ où $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la trace de A.
   (c) Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{Tr}(A)\}$.
   (d) Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
   (e) Vérifier que $\mathrm{Tr}(A)$ est valeur propre de A.
   (f) Montrer que : A est diagonalisable $\iff \mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
   On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   (a) Montrer que $f(u) \neq 0$.
   (b) En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.
   (c) Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable.