DEVOIR SURVEILLE 3 : un corrigé

Exercice 1

1. On procède par intégration par parties. On pose $u : x \mapsto \frac{x^2}{2\pi} - x$ et $v : x \mapsto \frac{\sin(kx)}{k}$, toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On a donc

$$\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = \left[\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\frac{\sin(kx)}{k}dx$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = 0 - 0 - \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)dx.$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant cette fois-ci $\tilde{u} : x \mapsto \frac{x}{\pi} - 1$ et $\tilde{v} : x \mapsto -\frac{\cos(kx)}{k}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

$$\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)dx = \left[\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\frac{-\cos(kx)}{k}dx$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)dx = 0 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kx)dx = -\frac{1}{k}.$$

Finalement, on a bien $\boxed{\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}.}$

2. Soit $x \in]0, \pi]$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{n+1}{2}x}.$$

   On a donc bien $\boxed{e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right).$$

   Alors

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k = e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k = e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$$

   car $e^{ix} \neq 1$ puisque $x \in]0, \pi]$. Avec la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$$

   d'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right).}$$

3. ψ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et $x \mapsto \frac{-\cos(mx)}{m}$ aussi (pour $m>0$). Par intégration par parties
$$\int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx = \left[\psi(x)\frac{-\cos(mx)}{m}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \psi'(x)\frac{-\cos(mx)}{m}dx.$$
$$\int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx = \frac{(-1)^{m+1}\psi(\pi)}{m} + \frac{\psi(0)}{m} + \frac{1}{m}\int_0^\pi \psi'(x)\cos(mx)dx.$$
Par inégalité triangulaire, on obtient alors
$$\left|\int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx\right| \leq \frac{|\psi(m)|+|\psi(0)|+\int_0^\pi |\psi'(x)|dx}{m}.$$
Le numérateur du majorant ne dépend pas de m : le majorant converge donc vers 0 lorsque m tend vers ∞ et par domination, on a bien $\boxed{\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx = 0.}$

4. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
$g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-x}{2\frac{x}{2}}$, d'où $g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -1$ et donc g converge vers -1 en 0. Comme $g(0)=-1$, g est continue en 0.
Pour $x \in]0,\pi]$,
$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\pi}-1\right)2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}.$$
On trouve, avec des développements limités à l'ordre 2 en 0 que le numérateur est égal à $\frac{x^2}{2\pi}+o(x^2)$. On a donc $g'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2\pi}}{4\frac{x^2}{4}}$ ou encore $g'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2\pi}$. g' converge donc vers $\frac{1}{2\pi}$ en 0.
Par corollaire du théorème des accroissements finis, g est dérivable en 0 et $g'(0)=\frac{1}{2\pi}$. Donc g est dérivable sur $[0,\pi]$ et g' est continue sur $[0,\pi]$: g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

5. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La première question donne $\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos(kx)dx$. Par linéarité de l'intégrale,
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\sum_{k=1}^n \cos(kx)dx.$$
On a alors, avec 2.a. $\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \varphi(x)dx$ où pour $x\in]0,\pi]$,
$$\varphi(x) = \frac{\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$$
et $\varphi(0)=0$. On a donc pour tout $x\in[0,\pi]$, $\varphi(x) = g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \left(\frac{x^2}{4\pi}-\frac{x}{2}\right)$.
D'où
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx - \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{4\pi}-\frac{x}{2}\right)dx.$$
Après calculs simples, la deuxième intégrale vaut $-\frac{\pi^2}{6}$, d'où
$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)dx.}$$

(b) g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. 3. donne donc $\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)dx \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Il suit alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi^2}{6}$: $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge et sa somme vaut } \frac{\pi^2}{6}.}$

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{x}{n(1+2nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2n^2x}$, donc $\frac{x}{n(1+2nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Or $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2>1$). Par linéarité, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+2nx)}$ converge. $\boxed{\varphi(x) \text{ est bien défini pour tout réel } x > 0.}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\Delta(x) = \varphi(x) - \frac{\pi^2}{12}$. Avec 5.b.

$$\Delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n(1+2nx)} - \frac{1}{2n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2n^2(1+2nx)}.$$

Il s'agit bien d'une série absolument convergente (car $\left|\frac{-1}{2n^2(1+2nx)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^3x}$). On a donc

$$|\Delta(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2(1+2nx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2 2nx}$$

cette dernière série étant bien convergente. Finalement,

$$|\Delta(x)| \leq \frac{1}{4x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Comme $\frac{1}{x}$ converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, par domination, on a bien $\Delta(x)$ qui converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, i.e. $\boxed{\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi^2}{12}.}$

Exercice 2

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) ◇ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $S_{p+1} - S_p = \frac{1}{n+1+p} > 0$.

$\boxed{\text{Donc la suite } (S_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

◇ Or la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ est une série à termes positifs divergente. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = +\infty$.

Or $S_p = \sum\limits_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p = +\infty$.

$\boxed{\text{Ainsi la suite } (S_p)_{p\geqslant 1} \text{ diverge.}}$

(b) Par définition comme $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p = +\infty$,

$$\forall A > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant p_0,\ S_p \geqslant A$$

En particulier pour un réel $A > 1$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant p_0$, $S_p \geqslant A > 1$.

$\boxed{\text{Ainsi il existe au moins un entier naturel } p \text{ tel que l'on ait : } \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1.}$

3. Par définition de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \geqslant n$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty.}$

4. $\diamond$ Remarquons que $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$.
   Donc en sommant ces inégalités, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n}$.
   En additionnant $\frac{1}{n}$ à cette inégalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{Donc } \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1.}$

$\diamond$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{1}{n+k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{3n-2-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k}\right) + \frac{1}{2n-1}\end{aligned}$$

Or $\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ a \neq b\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$, car $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$.
Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} > \frac{4}{4n-2}$.
Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k}\right) > \frac{2(n-1)}{2n-1}$.
Donc $\sum\limits_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > \frac{2(n-1)}{2n-1} + \frac{1}{2n-1}$.

$\boxed{\text{Finalement } \sum\limits_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1.}$

5. D'après la définition de p_n et les inégalités précédentes, $n - 1 \leqslant p_n \leqslant 2n - 2$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2n - 1 \leqslant a_n \leqslant 3n - 2$.
   Alors en divisant par n ($n > 0$), $2 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 - \frac{2}{n}$.
   Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. $\boxed{\text{Donc par passage à la limite } 2 \leqslant \ell \leqslant 3.}$

6. Soit $n \geqslant 0$.
   Par définition de p_n, $1 < \sum\limits_{k=0}^{p_n} \frac{1}{n+k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k} \leqslant 1$.
   Donc $1 < \sum\limits_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$ et $\sum\limits_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.
   $\boxed{\text{Ainsi } 1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}.}$

7. Soit n un entier non nul.

   $\diamond$ Soit k un entier non nul.
   La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$.

Donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.
Donc en sommant sur k de n à $a_n - 1$,

$$\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

Ou encore

$$\sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

$\diamond$ Or d'après la question précédente, $1 < \sum\limits_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$. Donc $1 - \frac{1}{n} < \sum\limits_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k}$.

Et $\sum\limits_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$. Donc $\sum\limits_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1.}$$

8. $\diamond$ Remarquons que $\int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(a_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n)$.
   Ainsi d'après les questions précédentes, $1 - \frac{1}{n} \leqslant \ln(u_n) \leqslant 1$.

   $\diamond$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.
   Donc par encadrement, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 1$.

   Par continuité de la fonction exp en 1, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e.}$

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -2 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$. On met dans la première colonne la somme de toutes les colonnes : $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & 1 & x+1 \end{vmatrix}$. On peut alors mettre x en facteur $\chi_A(x) = x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

   On soustrait aux lignes 2 et 3 la première ligne, il vient alors $\chi_A(x) = x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ et finalement $\chi_A(x) = x^3$. On a donc $\boxed{\chi_A = X^3.}$

2. Le spectre de A est donc réduit à $\{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc serait la matrice nulle : ce qui n'est pas. Donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

3. On cherche une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est N. Si on note $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ cette base, on veut donc $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_1$ et $f(u_3) = u_2$.
   On cherche donc un élément du noyau de f.

   Les colonnes de A vérifient $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Posons $u_1 = (1, 1, 1)$, $f(u_1) = 0$.

   On cherche ensuite un vecteur v tel que $f(v) = u_1$.

Soient $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f(v) = u_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x - z &= 1 \\ x - z &= 1 \\ 2x - y - z &= 1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x - z &= 1 \\ 2x - y - z &= 1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x - z &= 1 \\ -y + z &= -1 \end{cases} \quad (L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1) \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x &= 1 + z \\ y &= 1 + z \end{cases} \end{aligned}$$

On choisit $u_2 = (0, 0, -1)$.
On choisit de même $u_3 = (0, 1, 0)$ qui vérifie $f(u_3) = u_2$.
On pose donc $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ et $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$. On trouve $\det(P) = 1 \neq 0$, donc $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
Par construction, la matrice de f dans cette base est N : $\boxed{A \text{ et } N \text{ sont semblables}}$ (elles représentent le même endomorphisme).
La matrice P définie précédemment, vérifie bien $\boxed{N = P^{-1}AP}$ par la formule de changement de base.

4. On a donc $A = PNP^{-1}$ et on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PN^nP^{-1}$.
Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $N^n = 0$. On trouve donc $\boxed{A^n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.}$ Par ailleurs, $\boxed{A^0 = I_3,\ A^1 = A \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

Exercice 4

1. φ est linéaire car la dérivation est linéaire.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n - 1 \leq n$ et $\deg(P - P') \leq n$: $P - P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
$\boxed{\varphi \text{ induit donc un endomorphisme sur } \mathbb{R}_n[X].}$

2. $\varphi_n(1) = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_n(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. La matrice réprésentative de φ_n dans la

base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. Le déterminant de cette matrice est 1 car elle est triangulaire et ne comporte que des 1 sur la diagonale : $\det(\varphi_n) = 1 \neq 0$. $\boxed{\varphi_n \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

4. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. $\frac{X^i}{i!} \in \mathbb{R}_n[X]$: φ_n étant un automorphisme, on peut poser $s_i = \varphi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right)$. On a alors $\boxed{\varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}.}$
   Par ailleurs, (s_i) est l'image d'une base (car une famille de polynômes non nuls échelonnés en degrés) par un automorphisme (φ_n^{-1}), donc c'est une base : $\boxed{(s_i)_{0 \le i \le n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

5. $(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{Id} - \delta^{n+1} = \mathrm{Id}$ car les éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ ont leur dérivé n-ième nulle puisqu'ils sont de degré au plus $n+1$. $\boxed{(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{Id}.}$

6. Comme $\varphi_n = \mathrm{Id} - \delta$, on obtient $\varphi_n^{-1} = \mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n$. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

$$s_i = \varphi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + \frac{X^{i-1}}{(i-1)!} + \cdots + X + 1.$$

$$\boxed{s_i = \sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}.}$$

Exercice 5

1. $f \in \mathscr{E}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, f est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par la relation de Chasles, nous avons d'abord :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Ensuite, le changement affine de variable: $u = t - T$ dans la dernière intégrale donne grâce à la T-périodicité de f:

$$\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$

   d'où

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)dt}$$

2. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, alors: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, puis en dérivant cette égalité par rapport à x, on obtient: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+T) = f'(x)$ donc
   $\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } T\text{-périodique, alors } f' \text{ est } T\text{-périodique}}$.

Par contre, si on considère la fonction identique $x \mapsto x$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, n'est pas périodique mais sa dérivée est constante sur $\mathbb{R}$ donc périodique (pour n'importe quelle période).
Par conséquent, la réciproque étudiée est effectivement fausse :
$\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et si sa dérivée est } T\text{-périodique, alors } f \text{ n'est pas nécessairement périodique}}$.

3. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet au moins une primitive F sur $\mathbb{R}$, qui est par définition de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Nous avons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$, donc par différence de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{U(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et
$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \big(U(f)\big)'(x) = f(x) - f(x-1)}$.

4. Comme une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la question précédente prouve que U est une application de $\mathscr{E}$ dans lui-même.

   De plus, la linéarité de l'intégration des fonctions continues sur un segment justifie que U est linéaire :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{E}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$U(\lambda.f+g)(x) = \int_{x-1}^{x} (\lambda.f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda.U(f)(x) + U(g)(x)$$
$$U(\lambda.f+g)(x) = (\lambda U(f) + U(g))(x).$$

   Par conséquent, $\boxed{U \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{E}}$.

5. (a) Les fonctions polynomiales étant continues sur $\mathbb{R}$, nous pouvons considérer la restriction de U à E_n. Pour justifier que U définit un endomorphisme sur E_n, il suffit de montrer que E_n est stable par U. Pour cela, comme $\mathscr{B}_n$ est une famille génératrice de E_n, il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $U(X^k) \in E_n$.
   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(X^k)(x) = \int_{x-1}^{x} t^k\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} - \dfrac{(x-1)^{k+1}}{k+1} = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} \dfrac{(-1)^{k-j}}{k+1} x^j$,
   autrement dit $U(X^k) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} \dfrac{(-1)^{k-j}}{k+1} X^j \in E_n$.
   Par conséquent, E_n est stable par U et $\boxed{U \text{ induit un endomorphisme } U_n \text{ sur } E_n}$.

   (b) Les calculs effectués dans la question précédente nous permettent d'écrire la matrice A_n de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \dfrac{(-1)^n}{n+1} \\ 0 & 1 & -1 & & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & & (-1)^n \dfrac{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

   plus précisément, les coefficients de A_n sont $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j < i \leq n+1 \\ \binom{j}{i-1} \dfrac{(-1)^{j-i}}{j} & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq n+1 \end{cases}$

   (c) La matrice A_n est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc A_n est inversible et par conséquent, $\boxed{U_n \text{ est bijectif}}$.
   La matrice A_n étant triangulaire, les valeurs propres de U_n sont les coefficients diagonaux de A_n, donc U_n possède une seule valeur propre : 1, de multiplicité $n+1$. Si U_n était

diagonalisable, alors A_n serait semblable à I_{n+1} donc égale à I_{n+1}, ce qui n'est pas le cas, donc $\boxed{U_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

(*Autre version : on pouvait aussi calculer*
$\dim \operatorname{Ker}(A_n - I_{n+1}) = n + 1 - \operatorname{rg}(A_n - I_{n+1}) = 1 \neq n + 1$.)

6. Si $f \in \operatorname{Ker}(U)$, alors $U(f)$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, d'où :

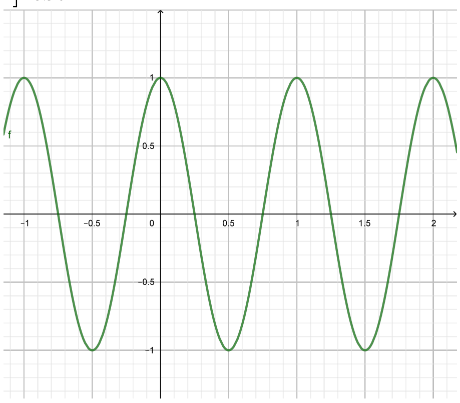
   (i) d'une part, $U(f)(1) = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$,

   (ii) et d'autre part, sa dérivée, $U(f)'$, est aussi la fonction nulle, ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(x-1) = 0$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est périodique de période } 1}$.

7. Réciproquement, si $f \in \mathscr{E}$, périodique de période 1 et telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $U(f)'$ est la fonction nulle, d'où $U(f)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ telle que $U(f)(1) = 0$ donc $U(f)$ est la fonction nulle, par conséquent,
$$\boxed{\operatorname{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}}.$$

8. La fonction $\boxed{f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } t \mapsto \cos(2\pi t)}$ est continue, 1-périodique et vérifie
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 = 0,$$
donc f est bien une fonction non nulle, élément de $\operatorname{Ker}(U)$.

   Sa représentation sur $[-1, 2]$ est:



9. La fonction valeur absolue est élément de $\mathscr{E}$ mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc elle n'admet pas d'antécédent par U (d'après **3.**), d'où $\boxed{U \text{ n'est pas surjectif}}$.

10. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $f_a : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

    (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = U(f_a)(x) = \int_{x-1}^{x} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-a}}{a}\mathrm{e}^{ax}$, donc $\boxed{F_a = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-a}}{a} f_a}$.

    (b) La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, g est prolongeable par continuité en 0 par $g(0) = 1$, car il est connu que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

    De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + 1$.

h est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $h'(x) = xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $h'(x)$ est du signe de x, d'où h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que h est positive sur $\mathbb{R}$, et même strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.

Par conséquent, g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et par continuité de g sur $\mathbb{R}$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ensuite, il est immédiat que $\lim\limits_{-\infty} g = 0$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$. On obtient donc le tableau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	$\|$	$+$	$+$
g	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(c) D'après les résultats obtenus dans la question précédente, g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout réel $\lambda > 0$, il existe un réel b tel que $\lambda = g(b)$.

De plus, nous avons vu que si $a \neq 0$, alors $U(f_a) = g(-a)f_a$ donc si $b \neq 0$, $U(f_{-b}) = \lambda.f_{-b}$ où f_{-b} n'est pas la fonction nulle, donc tout réel λ strictement positif et différent de 1 est valeur propre de U. De plus, nous avons vu que $U(1) = 1$ (question **5.**) d'où 1 est valeur propre de U.

En conclusion, $\boxed{\text{tout réel } \lambda \text{ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme } U}$.