DEVOIR SURVEILLE 3

Exercice 1 Etude d'une série produit

Si $S_a = \sum\limits_{n\geq 1} a_n$ et $S_b = \sum\limits_{n\geq 1} b_n$ sont deux séries convergentes, on appelle série produit de S_a par S_b, la série $\sum\limits_{n\geq 2} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série produit de $S_\alpha = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ par elle même.

1. **Equivalent de la somme partielle de la série harmonique**
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, n-ième somme partielle de la série harmonique.
   (a) Montrer que $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n)$. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à une expression de la forme $\frac{p}{n^q}$ où p et q sont deux réels à déterminer.
   (c) En déduire la nature de la suite (u_n) et enfin un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. **Une série produit**
   Pour quelles valeurs de α, la série S_α converge-t-elle ? Jusqu'à la fin de l'exercice, on choisit α de la sorte.

On considère $\sum\limits_{n\geq 2} c_n$ la série produit de S_α par S_α.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Déterminer le maximum de la fonction $x \mapsto x(n-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire, que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $|c_n| \geq \frac{4^\alpha (n-1)}{n^{2\alpha}}$.
   (c) Conclure que pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, la série $\sum\limits_{n\geq 2} c_n$ diverge.
4. On suppose désormais que $\alpha = 1$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.
   (b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, une expression de c_n en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$.
   (c) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.
   (d) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} c_n$.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Donner le polynôme caractéristique de A.

2. Donner les éléments propres de A, en déduire que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On choisira P de sorte que sa première ligne soit remplie de 1. On calculera P^{-1}.

3. Trouver toutes les matrices B commutant avec A. On pourra les exprimer sous la forme PCP^{-1} avec C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à préciser.

4. Déterminer toutes les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifiant $B^2 = A$. On pourra les exprimer sous la forme PCP^{-1} avec C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à préciser.

On cherche à calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n, par deux méthodes différentes.

5. **Première méthode** Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la question 2.

6. **Deuxième méthode**
   (a) Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   (c) Après avoir établi une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n, donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n et retrouver le résultat de la question **5**.

Problème

Le but du problème est de montrer le résultat suivant.

$$\textbf{Pour tout } C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$$

n désigne un entier naturel non nul fixé.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs

On s'intéresse dans la **Partie I** à trois cas particuliers.

On montre d'abord que $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C, où $\overline{C}$ désigne la matrice conjuguée de C, c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C.
On montre ensuite que $\det(I_n + C^2) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices symétriques réelles C.
On considère enfin le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}_+$.
La **Partie II** est consacrée au cas général.

On pourra admettre que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I : trois cas particuliers

1. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. Démontrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}$ et que :
$$\det(I_n + C\overline{C}) \geq 1,$$
avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

2. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que
$$\det(I_n + C^2) \geq 1,$$
avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

3. Démontrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

4. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que, dans ce cas, on a :
$$\det(I_n + C^2) = |\det(iI_n - C)|^2.$$
En déduire que $\det(I_n + C^2) \in \mathbb{R}_+$ et que $\det(I_n + C^2) = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{Sp}(C)$.

Partie II : le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on démontre que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.
Seule la question **3** de la partie I sera utile pour la suite.

1. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :
$$\det(I_n + C\overline{C}) = \det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$
On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$.

2. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1).

3. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.

4. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.
On considère l'application $\Omega : \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}),\ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

5. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :
   (a) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}),\ C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$;
   (b) $\Omega \circ \Omega = -\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$;
   (c) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C},\ \Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{\lambda}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$.

6. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.
   Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est libre et que le plan $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est stable par Ω.

7. Soit E un sous-espace vectoriel de$\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$.
   Montrer que :
$$E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique.
On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod\limits_{\lambda\,\mathrm{Sp}(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$

$$F_\lambda = \ker\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}\right).$$

On admet, pour traiter la question **II.10.**, que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

8. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}$.

9. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.

10. Conclure que : $\det(C_0) \in \mathbb{R}_+$.