DEVOIR SURVEILLE 3

Problème 1 : séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum (x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Partie 1 : exemples

1. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(x \mapsto \frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \left(x \mapsto \left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n\right)$ puis en déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$

   (il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

2. Ecrire la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.

3. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum (x \mapsto a_n \cos(nx))$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que la série trigonométrique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

7. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.

9. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\, dx$ pour k et n entiers naturels.

10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\, dx = 0$.
    On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

11. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

    Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

12. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

    En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(x \mapsto \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

    $$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

13. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$.

14. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

15. En déduire les sommes
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$
Déduire alors de la seconde somme la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

16. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum n a_n$ et $\sum n b_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum(x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

17. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \left(x \mapsto \frac{n}{3^n}\cos(nx)\right)$.

Problème 2 : algèbre linéaire

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On note χ_A le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer que 0 est valeur propre de A et donner un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

2. Trouver les réels α, β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) lorsque $S = tAS + L$.

3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, S est solution de (E_t) si et seulement si $(I_4 - tA)S = L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi_A(t) = t^4 \chi_A(1/t)$.

5. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.

6. En déduire que, pour t au voisinage de 0, l'équation (E_t) possède une unique solution S.

Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on note U_k la k-ième colonne de $I_4 - tA$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et on suppose que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t).

7. Vérifier que $L = S_0U_1 + S_1U_2 + S_2U_3 + S_3U_4$.

8. En déduire que $\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.

9. Montrer que, pour t au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de A. On note λ une valeur propre complexe non nulle de A.

10. Montrer que λ est valeur propre de la matrice transposée de A.

11. En déduire qu'il existe trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$(\mathcal{H}) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} px_1 & + & qx_2 & = & \lambda x_1 \\ qx_2 & + & px_3 & = & \lambda x_2 \\ & & px_1 & = & \lambda x_3 \end{array} \right. .$$

On considère désormais trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 qui vérifient le système $(\mathcal{H})$. On note alors $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ et on remarque que l'on peut toujours se placer dans l'un des trois cas suivants :
i) $M = |x_3|$; **ii)** $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$; **iii)** $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

12. Montrer, en distinguant ces trois cas, que $|\lambda| < 1$.

13. Montrer l'existence de nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :
$0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| < 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \ \chi_A(t) = t(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3)$.

14. Montrer l'existence de nombres complexes μ, a, b et c tels que :
$\mu \neq 0, \qquad 1 < |a| \leqslant |b| \leqslant |c| \qquad$ et $\qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \psi_A(t) = \mu(t - a)(t - b)(t - c)$.