DEVOIR SURVEILLE 2 : un corrigé

Problème 1

Partie I : règle de Cauchy

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{1/n} = l$.
   Suposons que $l < 1$ et utilisons la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. En posant $l' = \frac{1}{2}(1+l) < 1$ on obtient un n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u_n^{1/n} \leq l'$ et donc $u_n \leq l'^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.
   On en déduit que $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

   Suposons que $l > 1$ et utilisons la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$. En posant $l' = \frac{1}{2}(1+l) > 1$ on obtient un n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u_n^{1/n} \geq l'$ et donc $u_n \geq l'^n$ qui est le terme général d'une série géométrique divergente.
   On en déduit que $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

2. Utilisons cette règle avec : $u_n = \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$.
   On a bien $u_n > 0$ et $u_n^{1/n} = \frac{n+1}{2n+5}$ qui converge vers $\frac{1}{2} < 1$, donc la série $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

   Au tour de $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(lnn)^n}$ pour $n \geq 2$.
   On a bien $u_n > 0$ et $u_n^{1/n} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{(lnn)} = e^{\frac{\ln^2 n}{n} - \ln \ln n}$ qui a pour limite $0 < 1$ donc la série $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

Parie II : comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

1. **Théorème de Césàro.**
   Soit (x_n) une suite réelle convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$.
   On veut montrer que la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, converge également vers l.

   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La convergence de (x_n) vers l donne : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|y_n - l| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} l \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - l) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} |x_p - l|$$

$$\boxed{|y_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}|x_p - l|.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N$. On en déduit

$$|y_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{1}{n}\sum_{p=N+1}^{n}|x_p - l|$$

donc

$$|y_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{1}{n}\sum_{p=N+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\boxed{|y_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{\varepsilon}{2}.}$$

(c) Comme $M = \sum\limits_{p=1}^{N}|x_p - l|$ est une constante , la suite $\frac{M}{n}$ converge vers 0, donc il existe un rang N' tel que pour $n \geq N'$, $\frac{M}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Ainsi pour $n \geq \max(N, N')$ on a $|y_n - l| \leq \varepsilon$ et donc $\boxed{y_n \text{ converge vers } l.}$

2. Soit (x_n) une suite réelle telle que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $n \geq 1$, $X_n = x_n - x_{n-1}$ et appliquons lui le théorème de Cesaro.
On a donc $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \frac{x_n}{n} - \frac{x_0}{n}$ qui converge vers l.
Donc $\frac{x_n}{n} = Y_n + \frac{x_0}{n}$ converge bien vers l. $\boxed{\left(\frac{x_n}{n}\right) \text{ converge vers } l.}$

Remarque : on pourrait obtenir les mêmes résultats avec $l = +\infty$ ou $l = -\infty$. On n'en demande pas de démonstration, mais on pourra l'utiliser.

3. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ tende vers $l \in \mathbb{R}$.

Supposons dans un premier temps que l est non nul.
Alors en composant par ln qui est bien continue, on a $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ln x_{n+1} - \ln x_n$ qui converge vers $\ln l$.
Et donc par le résultat précédent, on a $\frac{1}{n}\ln x_n = \ln(x_n^{1/n})$ qui converge vers $\ln l$, et donc en composant par exp qui est continue, on a bien $x_n^{1/n}$ qui converge vers l.

Et si jamais $l = 0$, on a $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ln x_{n+1} - \ln x_n$ qui diverge vers $-\infty$
Et donc par le résultat précédent, on a $\frac{1}{n}\ln x_n = \ln(x_n^{1/n})$ diverge vers $-\infty$ et donc en composant par exp , on a bien $x_n^{1/n}$ qui converge vers 0.
Ainsi dans tous les cas, $\boxed{\text{la suite } (\sqrt[n]{x_n}) \text{ converge vers } l.}$

Conclusion : si la règle de d'Alembert s'applique, celle de Cauchy aussi.

4. Soit (u_n) définie par $u_n = e^{(-1)^n - n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a pour tout n , $u_n > 0$ et $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{(-1)^{n+1}-(-1)^n-n-1+n} = e^{-1+2(-1)^{n+1}}$.
Donc $v_{2n} = e^{-3}$ et $v_{2n+1} = e$.
Ces deux suites extraites ont donc des limites distinctes donc la suite v_n diverge, donc
$\boxed{\text{on ne peut pas appliquer la règle de D'Alembert.}}$

Cependant on a $u_n^{1/n} = e^{\frac{(-1)^n}{n}-1}$ qui converge vers $e^{-1} < 1$. Et donc
$\boxed{\text{on peut appliquer la règle de Cauchy et conclure avec la convergence de la série.}}$

On peut donc conclure que la réciproque est fausse :
$\boxed{\text{il est possible parfois que la règle de Cauchy s'applique alors que celle de D'Alembert échoue.}}$

Problème 2

Partie I

1. (a) Soit $t \in]-1, 1]$. Soit $N \in \mathbb{N}$. $\sum\limits_{n=0}^{N} (-t)^n = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)}$ car $-t \neq 1$. D'où $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{N} (-t)^n = \frac{1+(-1)^N t^{N+1}}{1+t}.}$

   (b) Soit $x \in]-1, 1]$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{N} (-t)^n - \frac{(-1)^N t^{N+1}}{1+t} \right) dt.$$

   Par linéarité de l'intégrale

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^x t^n dt + (-1)^{N+1} \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt.$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{N+1} \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt.}$$

   (c) Soit $x \in]-1, 0]$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\left| \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|x|^{N+1}}{1+t} dt.$$

   Or pour $t \in [x, 0]$, $x \leq t \leq 0$, $-|x| \leq t \leq 0$, donc $1 - |x| \leq 1 + t \leq 1$ et $1 - |x| > 0$, donc $0 < \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1-|x|}$. Par croissance de l'intégrale,

$$\left| \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^{N+1}}{1-|x|} dt = \frac{1}{1-|x|} \int_x^0 |t|^{N+1} dt.$$

   Par parité de $t \mapsto |t|$,

$$\int_x^0 |t|^{N+1} dt = \int_0^{-x} |t|^{N+1} dt = \int_0^{|x|} t^{N+1} dt = \left[\frac{t^{N+2}}{N+2} \right]_{t=0}^{t=|x|} = \frac{|x|^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+2}.$$

   Finalement,

$$\boxed{\left| \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}.}$$

(d) Soit $x \in [0,1]$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\left|\int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}dt\right| = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}dt \leq \int_0^x t^{N+1}dt = \frac{x^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+2}.$$

On a donc bien

$$\boxed{\left|\int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}dt\right| \leq \frac{1}{N+2}.}$$

(e) Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq |x|^n$. Or $\sum |x|^n$ converge (série géométrique de raison $|x| \in [0,1[$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \left|(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right|$ converge, i.e. $\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge absolument, donc converge.
Pour $x = 1$, on s'intéresse à $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$. Elle converge par le théorème spécial à certaines séries alternées. En effet, elle est bien alternée, $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ converge bien vers 0 et $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|\right)$ est bien décroissante.
Dans tous les cas, $\boxed{\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ converge.}}$

(f) I.1.b. donne, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + S_N(x) \qquad (1)$$

avec $|S_N(x)| \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}$ si $x \in]-1,0]$ et $|S_N(x)| \leq \frac{1}{N+2}$ si $x \in [0,1]$. Dans les deux cas, par domination, $S_N(x) \underset{N\to+\infty}{\to} 0$. Comme $\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge, on peut passer à la limite dans (1). On obtient alors

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x).}$$

(g) La formule précédente donne avec $x = -\frac{1}{2} \in]-1,1]$

$$\ln(1/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

et donc

$$-\ln(2) = \sum_{n=0} +\infty \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}.$$

Finalement, avec un décalage d'indices,

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}.}$$

De même $x = 1$ donne

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

puis

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.}$$

2. (a) Soit $x \in]-1,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $t \in]-1,1[$. $\ln(1+t) = \sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + S_n(t)$, avec $S_n(t) = \ln(1+t) - \sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$, donc S_n est continue sur $]-1,1[$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^x \ln(1+t)dt = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^x t^{n+1}dt + \int_0^x S_N(t)dt.$$

Donc

$$(1+x)\ln(1+x) - (1+x) + 1 = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+2}}{n+2} + R_N(x)$$

avec $R_N(x) = \int_0^x S_N(t)dt$. On peut encore écrire,

$$(1+x)\ln(1+x) - x = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + R_N(x).$$

Si $x \leq 0$, $|R_n(x)| \leq \int_x^0 |S_N(t)|dt \leq \int_x^0 \frac{1}{(N+2)(1-|t|)}dt$ et pour $x \leq t \leq 0$, $|t| \leq |x|$,
$1 - |t| \geq 1 - |x|$ et finalement, $\frac{1}{1-|t|} \leq \frac{1}{1-|x|}$. On a alors
$|R_N(x)| \leq \frac{1}{N+2}\int_x^0 \frac{1}{1-|x|}dt \leq \frac{|x|}{(N+2)(1-|x|)} \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}$.
Si $x > 0$, alors $|R_N(x)| \leq \int_0^x |S_N(t)|dt \leq \int_0^x \frac{1}{N+2}dt \leq \frac{x}{N+2}$. Mais $0 < 1 - |x| \leq 1$, d'où $1 \leq \frac{1}{1-|x|}$. Finalement, $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}$.
Dans tous les cas, on a bien

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}.}$$

(b) Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|(-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Or, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, donc $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann). Par comparaison, de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge. Par domination, $\sum \left|(-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)}\right|$ converge, i.e.
$\boxed{\sum(-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} \text{ converge absolument, donc converge.}}$

(c) Soit $x \in]-1,1[$. On utilise I.2.a.. La majoration donne $R_N(x) \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ et I.2.b. rend possible le passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$. On obtient alors

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} = (1+x)\ln(1+x) - x.}$$

(d) $x = -\frac{1}{2}$ donne

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(-1)^{n+2}\frac{1}{2^{n+2}}}{(n+2)(n+1)}.$$

On a alors

$$-\ln(2) + 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)(n+2)},$$

ou encore

$$\ln(2) = -\sum_{n=0} +\infty \frac{1}{2^{n+1}(n+2)(n+1)} + 1$$

et finalement, avec un changement d'indice,

$$\boxed{\ln(2) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k(k+1)} + 1.}$$

Partie II

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n}{n 2^{n+1} n! 2 \times 4 \times \cdots \times 2n} = \frac{(2n)!}{n 2^{n+1} n! 2^n n!}.$$

On a donc bien

$$\boxed{a_n = \frac{(2n)!}{n 2^{2n+1} (n!)^2}.}$$

(b)

$$\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

(c) On trouve après simplification,

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (séries de Riemann). Par linéarité, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge.}}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{2n}(x) - \sin^{2n+2}(x)\right) dx$$

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)(1 - \sin^2(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) \cos^2(x) dx.$$

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+1) \sin^{2n}(x) \cos(x) \quad \cos(x) dx.$$

Par intégration par parties, avec les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin^{2n+1} x$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \left(0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x (-\sin x) dx\right)$$

i.e.

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x dx.$$

Finalement, on a bien

$$\boxed{I_n - I_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{2n+1}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation précédente donne $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$. On montre alors le résultat voulu par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$. $I_1 = \frac{1}{2} I_0$ et $I_0 = \frac{\pi}{2}$, d'où $I_1 = \frac{\pi}{4}$.
Or $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 1$ et $2^1 1! = 2$, d'où $\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!} = \frac{1}{2}$. L'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'hypothèse de récurrence soit vraie. Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2}$$

avec l'hypothèse de récurrence. On en déduit que

$$I_{n+1} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{\pi}{2}.$$

L'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence, elle est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{I_n = a_n \pi n.}$$

3. (a) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. $\sin^2(x) \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\sin^{2n}(x)}{n} \leq (\sin^2(x))^n$. Or $\sum(\sin^2(x))^n$ converge (série géométrique de raison $\sin^2(x) \in [0,1[$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} \text{ converge.}}$
On reconnaît, avec I.1.f.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sin^2(x))^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-\sin^2(x)) = -\ln(\cos^2(x)).$$

On a finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} = -2\ln(\cos(x)).}$$

(b)

Partie III

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-(n+1)}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}}.$$

Finalement,

$$\boxed{U_n = \frac{1}{2^n}.}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\frac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}(U_{k-1} - U_k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}U_{k-1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}U_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k+1}U_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}U_k.$$

Par linéarité

$$R_n = \frac{1}{n+1}U_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) U_k = \frac{U_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{k(k+1)}U_k.$$

On a donc

$$\boxed{R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}.}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$. Or pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq n+1 \implies \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{n+2}$, donc

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leq \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} \leq \frac{1}{n+2}R_n.$$

Comme $\frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a bien

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o\left(R_n\right) \qquad [n \to +\infty].}$$

(d) On a donc $R_n = \frac{U_n}{n+1} + o(R_n)$ $[n \to +\infty]$. Donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U_n}{n+1}$. Or $U_n = \frac{1}{2^n}$ et $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, il reste donc

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0,1]$: $-t \neq 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

On a bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.}$$

(b) En intégrant sur $[0,1]$, pour $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

On obtient alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Alors

$$(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_n.$$

On a donc bien

$$\boxed{S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec $u : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $v : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$, par intégration par parties, on obtient,

$$S_n = (-1)^n \left\{ \left[\frac{1}{1+t} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{-1}{(1+t)^2} dt \right\}$$

$$S_n = (-1)^n \left\{ \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \right\}$$

Il vient alors

$$\boxed{S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.}$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}.$$

$$\frac{2n}{(-1)^n} S_n = \frac{n}{n+1} + 2\frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.$$

L'encadrement précédent montre que l'intégrale converge vers 0. Comme le premier terme du membre de gauche converge vers 1, tout le membre de gauche converge vers 1. Donc

$$\boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}.}$$

3. (a) On a vu en II.1.c que $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, par linéarité, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$ converge et est à valeurs positives. Par sommation des relations de comparaison, on a alors

$$T_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}}$$

et donc

$$\boxed{T_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}.}$$

(b) On a le résultat par continuité et décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en utilisant la croissance de l'intégrale.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p > n$. On somme les inégalités précédentes de $k = n+1$ à p. On a alors, avec la relation de Chasles

$$\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^{3/2}} \leq \int_{n}^{p} \frac{1}{t^{3/2}} dt.$$

On a donc

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{p+1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^{3/2}} \leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

Tous les termes de la double inégalité convergent lorsque p tend vers $+\infty$. Passons donc à la limite :

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq 1.$$

Les deux termes qui encadrent convergent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème d'encadrement, $\frac{\sqrt{n}}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Finalement, avec III.3.a.

$$\boxed{T_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.}$$

4. On procède comme en III.1.. On reprend la suite (U_n). Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}(U_{k-1} - U_k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k(k+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{(k+1)(k+2)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \\
&= \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{k(k+1)}\right) U_k \\
&= \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-2}{k(k+1)(k+2)} U_k \\
&= \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} - 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} U_k \\
&= \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} - 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

La dernière somme est inférieure ou égale à $\frac{1}{n+3}V_n$ et donc est négligeable devant V_n. Il vient donc

$$V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Ce qui donne finalement

$$\boxed{V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 2^n}.}$$

5. On a donc

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}, \quad S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}, \quad T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}, \quad \text{et} \quad V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 2^n}.$$

Or

$$\frac{1}{n^2 2^n} = o\left(\frac{1}{n2^n}\right), \quad \frac{1}{n2^n} = o\left(\frac{(-1)^n}{2n}\right), \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^n}{2n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\right).$$

Donc

$$V_n = o(R_n), \quad R_n = o(S_n), \quad \text{et} \quad S_n = o(T_n).$$

V_n est donc le reste qui tend le plus vite vers 0 et T_n est celui qui tend le moins vite vers 0. $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)2^n} \text{ est donc la série qui converge le plus rapidement}}$ et $\boxed{\sum_{n\geq 1} a_n \text{ est celle qui converge le moins vite.}}$