



DEVOIR SURVEILLE 2

Problème 1**Partie I : règle de Cauchy**

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} = l$. Montrer la **règle de Cauchy** suivante :

si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge et si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

2. Donner la nature des séries suivantes : $\sum \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$, et $\sum \frac{n \ln n}{(l n n)^n}$.

Partie II : comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy**1. Théorème de Césàro.**

Soit (x_n) une suite réelle convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$.

On veut montrer que la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, converge également vers l .

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La convergence de (x_n) vers l donne : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|y_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n |x_p - l|$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N$. Montrer que

$$|y_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^N |x_p - l| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) Conclure.

2. Soit (x_n) une suite réelle telle que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ converge vers l .

Remarque : on pourrait obtenir les mêmes résultats avec $l = +\infty$ ou $l = -\infty$. On n'en demande pas de démonstration, mais on pourra l'utiliser.

3. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ tende vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{x_n})$ converge vers l . (On pourra distinguer $l = 0$ et $l \neq 0$ et appliquer \ln pour se ramener au cas précédent.)

Conclusion : si la règle de d'Alembert s'applique, celle de Cauchy aussi.

4. Soit (u_n) définie par $u_n = e^{(-1)^n - n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comparer les règles de d'Alembert et de Cauchy pour la série de terme général u_n . Que peut-on conclure ?

Problème 2 Le but de ce problème est de donner, dans les parties I et II, quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III, la vitesse de convergence de ces quatre séries.

Partie I

1. (a) Soit $t \in]-1, 1]$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sum_{n=0}^N (-t)^n$.

- (b) En déduire que pour $x \in]-1, 1]$ et pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{N+1} \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt.$$

- (c) Soit $x \in]-1, 0]$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer $|\int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt| \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}$.

- (d) Soit $x \in [0, 1]$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $|\int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t} dt| \leq \frac{1}{N+2}$.

- (e) Soit $x \in]-1, 1]$. Montrer que $\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge.
On distinguera le cas $x \in]-1, 1[$ et le cas $x = 1$.

- (f) Soit $x \in]-1, 1]$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x).$$

On montrerait de même (il n'est pas demandé de le faire, mais on pourra utiliser le résultat si nécessaire)

$$\forall x \in [-1, 1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- (g) En déduire que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} \quad \text{et} \quad \ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

2. (a) Soit $x \in]-1, 1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que

$$(1+x)\ln(1+x) - x = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + R_N(x)$$

$$\text{avec } |R_N(x)| \leq \frac{1}{(N+2)(1-|x|)}.$$

- (b) Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que la série $\sum (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)}$ converge.

(c) Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} = (1+x) \ln(1+x) - x.$$

(d) En déduire que

$$\ln(2) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

Partie II

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \dots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

(b) Rappeler la formule de Stirling.

(c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{2n+1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^{2n}(x)}{n}$ converge et donner sa somme.

(b) (Il n'y a pas de réponse à donner ici, juste à enregistrer les résultats). On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} dx.$$

On admet l'enchaînement suivant (et que les objets écrits ont un sens)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} dx = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = \ln(2).$$

Partie III

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}, \quad S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \quad \text{et } V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'ordre n des séries vues en première et deuxième partie. Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites $(R_n), (S_n), (T_n)$ et (V_n) .

1. On note dans cette question $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $U_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer U_n . Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n \geq 0}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

(c) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n) [n \rightarrow +\infty]$.

(d) Conclure que $R_n \sim \frac{1}{n2^n}$.

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1] \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

(c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.$$

(d) Conclure que $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Montrer que $T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$.

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^{3/2}}$.

(c) Conclure que $T_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \frac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement ? Laquelle converge le moins rapidement ? Justifiez vos réponses.