DEVOIR SURVEILLE 2

Exercice 1
Déterminer la nature des séries suivantes, dont on donne le terme général.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2,\, u_n = \ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, v_n = n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, w_n = \frac{n^2}{2^n+n}$,
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, x_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 2
Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 3} u_n$, après avoir montré sa convergence, avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3, \qquad u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}.$$

Exercice 3
On définit (u_n) par $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

2. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$.

Exercice 4
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On utilisera aussi dans cet exercice la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le rang de f et la dimension du noyau de f.
   (b) Montrer que le vecteur $u = (1,1,1)$ forme une base du noyau de f.
   (c) Déterminer un vecteur v tel que $f(v) = u$. On veillera à ce que la troisième coordonnée de v soit égale à -1.
   (d) Soit $w = (0,1,0)$. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Donner la matrice représentative de f dans la base (u,v,w).
   (b) On note P la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w). Donner l'expression de P.
   (c) Calculer l'inverse de P.
   (d) Donner une relation entre A et N à l'aide de P.

3. (a) Calculer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}$.

2. Soit $x \in]0, \pi]$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

3. Soit ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\lim_{m\to+\infty} \int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx = 0$.

4. Soit g la fonction réelle définie sur $[0, \pi]$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ g(0) = -1 \end{cases}$.

   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)dx$.

   (b) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Pour tout réel $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)}$.

   (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x)$ est bien définie, i.e. que $\sum_{n\geq 1}\frac{x}{n(1+2nx)}$ converge.

   (b) Montrer que $\varphi(x)$ converge vers $\frac{\pi^2}{12}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pourra montrer que, pour $x > 0$, $\left|\varphi(x) - \frac{\pi^2}{12}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^3x}$.

Exercice 6

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.
Étant donné un entier naturel n, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.
Soit φ l'application :

$$\varphi \; : \; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.

2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \dots, s_n$ telle que :
   (a) $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$,
   (b) $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :
$$(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \dots + \delta^n) = \mathrm{Id}$$

6. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Problème

- On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :
$$\mathcal{P} = \{P = (p_n,\ n \geq 0) /\ \forall n \geq 0,\ p_n \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1\}$$
- Pour $P, Q \in \mathcal{P}$, on définit
$$\mathrm{dist}(P, Q) = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) q_n \right|$$
  où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n \in A} p_n$.
- Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est à dire une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1 Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite
$$c \frac{\lambda^n}{n!},\ n \geq 0$$
appartienne à $\mathcal{P}$.

2. Soient p, q deux réels de $[0, 1]$. Calculer
$$\mathrm{dist}\left((1 - p, p, 0, \dots), (1 - q, q, 0, \dots)\right)$$

3. Soient $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n) p_n,\ n \geq 0)$ est convergente.

2 Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)},\ n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série de terme général $(nf(n)p_n^{(\lambda)},\ n \geq 0)$ est convergente.
5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\ n \geq 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)q_n$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = \mathcal{P}_\lambda$.

3 Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)} \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} \tag{3}$$

8. Pour $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$, établir l'identité suivante

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction de $\mathcal{S}_h$ est bornée.