DEVOIR SURVEILLE 2

Problème : autour de la série harmonique

Partie I : développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique

On s'intéresse aux suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad \gamma_n=H_n-\ln n,\quad x_n=\gamma_n-\frac{1}{2n}\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2\quad y_n=x_n-x_{n-1}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$: $\ln(n+1)\leq H_n\leq 1+\ln n$.

   (b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ converge (on pourra étudier ses variations).
   On notera γ sa limite.

   (c) Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\gamma_{n+1}-\gamma_n$.
   Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat du (b).

   (d) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$: $\gamma_n-\gamma=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$.

   (e) Montrer que :
   $$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2k^2}.$$

   (f) Montrer que :
   $$\gamma_n-\gamma\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

   (g) Montrer que :
   $$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad [n\to+\infty].$$

2. (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$?

   (b) Justifier pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :
   $$\gamma-x_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}y_k.$$

   (c) En déduire pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :
   $$\gamma-x_n=\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right).$$

3. Montrer
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3k^3}.$$

4. Montrer que
$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad [n\to+\infty].$$

Partie II : applications

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$k_n = \min\{k \in \mathbb{N}, H_k \geq n\}.$$
Donner un équivalent de k_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. **Quelques sommes**

   (a) Donner la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right)$ après avoir montré la convergence de la série.

   (b) On cherche maintenant à calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \left(\sum\limits_{p=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{p(2p+1)(2p+2)}\right)$. On note x_n le terme général de cette série et S_n sa n-ième somme partielle.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(2p+1)(2p+2)}$. On pose $u_1 = 0$.

   i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $u_n = 2H_n - 2H_{2n} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$.

   ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n = nu_{2^n} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{2^k}$.

   iii. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ converge et donner la valeur de sa somme.

3. **Inversion de Möbius**
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue par morceaux. On pose $\hat{f} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in [1, +\infty[$,
$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\frac{x}{k}\right).$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \hat{f}\left(\frac{x}{n}\right)$$
où μ est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^r$ si n est le produit de r nombres premiers deux à deux distincts et $\mu(n) = 0$ dans les autres cas. μ est appelée la fonction de Möbius.
On pourra montrer que pour $x \in [1, +\infty[$,
$$\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \hat{f}\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{1 \leq m \leq x} f\left(\frac{x}{m}\right) \sum_{n|m} \mu(n).$$

   (b) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2} \ln^2(n) + K + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad [n \to +\infty].$$

(c) On pose $g : x \mapsto x\ln(x)$, définie sur $[1, +\infty[$. Montrer

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{2}x(\ln(x))^2 + \gamma x\ln(x) - Kx + O(\ln(x)) \quad [x \to +\infty].$$

(d) On suppose qu'il existe (A, B, C) dans $\mathbb{R}^3$ et $\beta \in]0, 1[$ tels que

$$\hat{f}(x) = Ax(\ln(x))^2 + Bx\ln(x) + Cx + O(x^\beta) \quad [x \to +\infty].$$

Montrer

$$f(x) = 2Ax\ln(x) + O(x) \quad [x \to +\infty].$$

On pourra s'intéresser à $\hat{\mathrm{Id}}$.

4. **Nombre moyen de diviseurs des entiers inférieurs à x**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note τ_n le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. Si $x \in [1, +\infty[$, on pose

$$F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \tau_n.$$

(a) Trouver un équivalent simple de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
On pourra montrer que $F(x) = \sum_{d \leq x, d' \leq x, dd' \leq x} 1$.

(b) Démontrer

$$F(x) = x\ln(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) \quad [x \to +\infty].$$

On pourra couper la somme suivant la position de d et d' par rapport à $\sqrt{x}$.

Exercice
On note k un entier naturel supérieur à 3 et

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ Im(z) > 0\}$$

1. (a) Pour tout entier naturel n non nul , on pose $I_n = \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2\ ,\ \max(|c|,|d|) = n\}$.
   Montrer que $\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ est l'union disjointe des I_n.

   (b) Montrer que $\mathrm{Card}(I_n) = 8n$.

   (c) Jusqu'à la fin de la question 1, on fixe $z \in \mathbb{H}$. On considère le parallèlogramme P du plan complexe de sommets $1+z$, $-1+z$, $-1-z$ et $1-z$.
   Il ne s'agit que du contour : on a ainsi $P = \{x+zy\ ,\ x,y \in [-1,1] \text{ tels que} \max(|x|,|y|) = 1\}$.
   Dessiner ce parallèlogramme dans le cas où $z = 1+i$.

   (d) Montrer qu'il existe une constante K non nulle telle que $\forall u \in P\ ,\ |u| \geq K$.

   (e) On considère $(c,d) \in I_n$. Montrer que $\frac{1}{n}(cz+d) \in P$ et en déduire que $|cz+d| \geq Kn$.

   (f) En déduire qu'il existe une constante K' telle que

$$\sum_{(c,d)\in I_n} \frac{1}{|cz+d|^k} \leq \frac{K'}{n^{k-1}}$$

2. En déduire que la famille $\left(\frac{1}{(cz+d)^k}\right)_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}$ est sommable.

On note la somme de cette dernière famille $G_k(z)$.

3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$ on a $z+1 \in \mathbb{H}$ et que $G_k(z+1) = G_k(z)$.

4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$ on a $\frac{-1}{z} \in \mathbb{H}$ et que $G_k\left(\frac{-1}{z}\right) = z^k G_k(z)$