DEVOIR SURVEILLE 1 : un corrigé

Exercice 1

1. Soient $Z_1 = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $Z_2 = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$.

   (a) On a $|Z_1| = 2\sqrt{6}\sqrt{1^2+1^2} = 4\sqrt{3}$ et $|Z_2| = \sqrt{2}\sqrt{1^2+3} = 2\sqrt{2}$.
   Donc $Z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$, un argument de Z_1 est donc $\frac{\pi}{4}$.
   Et $Z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, un argument de Z_2 est donc $\frac{\pi}{3}$.
   On en déduit que le module de $\frac{Z_1}{Z_2}$ est $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6}$ et qu'un de ses arguments est $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$.

   (b) On a $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2\sqrt{6}(1+i)}{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{6}(1+i)}{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})}\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\frac{1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{4}$ donc $\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$

   (c) On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. Les nombres complexes x et y vérifiant $x+y = 2+3i$ et $xy = -1+3i$ sont les solutions de l'équation $z^2 - (2+3i)z + (-1+3i) = 0$
   Le discriminant est $\Delta = (2+3i)^2 - 4(-1+3i) = 4+12i-9+4-12i = -1 = i^2$.
   Les solutions de l'équation sont donc $x = \frac{2+3i+i}{2} = 1+2i$ et $y = \frac{2+3i-i}{2} = 1+i$ ou $x = 1+i$ et $y = 1+2i$.

3. Soient x et y deux nombres réels compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et vérifiant $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

   (a) On a $x > 0$ et $\tan y > \tan\frac{\pi}{4}$ donc $x + 2y > \frac{\pi}{2}$.
   De plus $\tan x < 1$ donc $x < \frac{\pi}{4}$ et $y < \frac{\pi}{2}$ donc $x + 2y < \frac{5\pi}{4}$.

   (b) Comme ni x ni y ni $2y$ ni $x+2y$ ne sont congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on a $\tan 2y = \frac{2\tan y}{1-\tan^2 y} = -\frac{4}{3}$
   et $\tan(x+2y) = \frac{\tan x + \tan 2y}{1-\tan x\tan 2y} = \frac{\frac{1}{7}-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{21}} = \frac{-25}{25} = -1$

   (c) Grâce à l'intervalle on en déduit que $x + 2y = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

2. Soit $(a,x)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(a+kx)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^{a+kx}+e^{-a-kx})$$

Si $x=0$ on a $S_n=(n+1)\mathrm{ch}(a)$. Sinon on a affaire à des sommes de suites géométriques de raison différente de 1 donc

$$S_n=\frac{e^a}{2}\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}+\frac{e^{-a}}{2}\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$

On factorise numérateur et dénominateur par l'exponentielle de l'exposant moitié.

$$S_n=\frac{e^a}{2}\frac{e^{\frac{n+1}{2}x}\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}\mathrm{sh}\frac{x}{2}}+\frac{e^{-a}}{2}\frac{e^{-\frac{n+1}{2}x}\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{sh}\frac{x}{2}}$$

donc

$$S_n=\frac{e^a}{2}\frac{e^{\frac{n}{2}x}\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}}+\frac{e^{-a}}{2}\frac{e^{-\frac{n}{2}x}\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}}$$

et donc

$$S_n=\mathrm{ch}\left(a+\frac{nx}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}}$$

Exercice 3

1. Supposons qu'un réel x vérifie l'équation $\sqrt{x(x-3)}=\sqrt{3x-5}$.
   Alors, déja, les quantités sous les radicaux sont positives donc ($x\geq 3$ ou $x\leq 0$) et $x\geq\frac{5}{3}$, donc $x\geq 3$.
   Ensuite les carrés sont égaux donc $x^2-3x=3x-5$ donc $x^2-6x+5=0$ donc $(x-5)(x-1)=0$ donc $x=5$ ou $x=1$. Et donc à cause de la condition $x\geq 3$ on en déduit $x=5$.
   Réciproquement on vérifie que 5 est solution de l'équation, c'en est donc la seule.

2. Considérons le système $\begin{cases}2e^x-6e^{y-2} &= &-\frac{4}{e^2}\\ e^{x+2}+2e^y &= &3\end{cases}$.
   Posons $X=e^{x+2}>0$ et $Y=e^y>0$. Le système équivaut à $\begin{cases}2X-6Y &= &-4\ (1)\\ X+2Y &= &3\ (2)\end{cases}$. et donc, par les combinaisons linéaire $(1)+3(2)$ et $-(1)+2(2)$ c'est-à-dire $\begin{cases}5X &= &5\ (1)\\ 10Y &= &10\ (2)\end{cases}$. c'est-à-dire $X=Y=1$ et donc équivaut à $x=-2$ et $y=0$.

Exercice 4

1. On a pour x voisin de 0 ,

$$(1+x)^{1/x}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}$$

$$=e\left(1+(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4})+\frac{(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4})^2}{2}+\frac{(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4})^3}{6}+o(x^3)\right)$$

$$=e\left(1+(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4})+\frac{\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}}{2}+\frac{\frac{x^3}{8}}{6}+o(x^3)\right)=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o(x^3)\right)$$

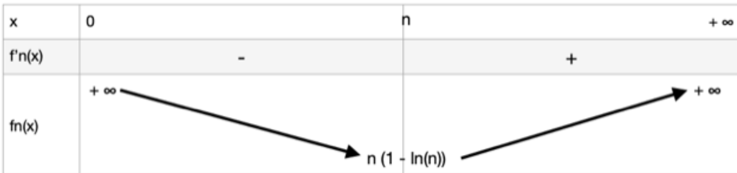
2. Pour x voisin de 0 on a $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\text{sh}x - x\text{ch}x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x + \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)} \sim \dfrac{\frac{x^3}{3}}{\frac{-x^3}{3}} \sim -1$ a donc pour limite -1

Problème 1

Pour tout entier naturel non nul, on note f_n la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_n(x) = x - n\ln x.$$

1. (a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de dérivée $f_n' : x \mapsto 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$ qui est négative sur $]0, n]$ et positive ensuite.
La limite en 0^+ est $+\infty$ et par croissante comparée c'est aussi la limite en $+\infty$.



On a donc le tableau suivant :

(b) Pour $n > 3$ on a $n(1 - \ln n) < 0$. La fonction f_n étant continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]0, n]$ et $[n, +\infty[$, on en déduit par le théorème de la bijection l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. **Etude de la suite (u_n).**

(a) Pour tout entier $n \geq 3$, on a $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(e) = e - n < 0$ donc par décroissance de f_n , $1 < u_n < e$.

(b) Soit $n \geq 3$. On a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$.
Donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
Or $u_{n+1} > 1$ donc $\ln(u_{n+1}) > 0$ donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.
Comme f_n est décroissante sur $[0, n]$ on en déduit $u_{n+1} < u_n$.
Et donc $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

(c) La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et minorée par 1 donc converge vers $\ell \geq 1$.
Si on avait $\ell > 1$, on aurait $f_n(u_n) = u_n - n\ln u_n$ qui diverge vers $-\infty$, ce qui absurde car $f_n(u_n) = 0$. Donc la limite de (u_n) est 1.

(d) Comme u_n converge vers 1 et que la dérivée de ln en 1 est $\frac{1}{1} = 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n - 1} = 1$; Or $\ln(u_n) = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(u_n-1)} = 1$ et $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3. **Etude de la suite (v_n).**

(a) On a $v_n > n$ donc (v_n) diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Soit $n \geq 3$. On a $f_n(n \ln n) = n \ln n - n \ln(n \ln n) = -n \ln \ln n < 0$ donc par croissance de f_n sur $[n, +\infty[$, on a $v_n > n \ln n$

(c) Soit g la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - 2 \ln x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{2}$.
g est donc décroissante sur $]0, 2]$ et croissante ensuite.
Or $g(2) = 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$ donc g est strictement positive. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2 \ln n$.

(d) On a $f_n(2n \ln n) = 2n \ln n - n \ln(2n \ln n) = n \ln n - n \ln 2 - n \ln \ln n = n \ln\left(\frac{n}{2 \ln n}\right) > 0$ car $n > 2 \ln n$.
On en déduit par les variations de f_n que $2n \ln n > v_n$ et donc $n \ln n < v_n < 2n \ln n$.

(e) On a $f_n(v_n) = 0$ donc $v_n = n \ln v_n$. Or par croissance de ln , $\ln(n \ln n) < \ln(v_n) < \ln(2n \ln n)$, donc $n \ln n + n \ln \ln n < v_n < n \ln 2 + n \ln n + n \ln \ln n$. Donc en divisant par $n \ln n$ on conclut par le théorème des suites encadrées que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln n$.

Problème 2

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout x de $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \qquad 7,3 < e^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : étude de la fonction f

1. (a) Par théorème d'opérations, f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$ et $f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$.

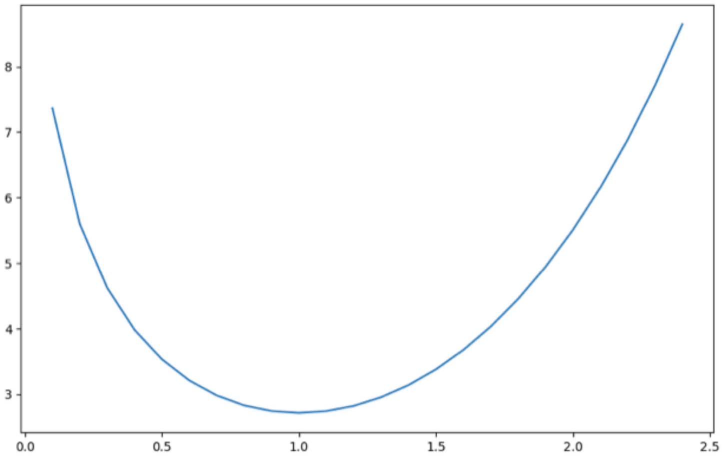
   (b) On obtient facilement

x	0		1		+ ∞
f''(x)		-		+	
f'(x)	- ∞	↗	0	↗	+ ∞

2. On obtient facilement

x	0		1		+ ∞
f'(x)		-		+	
f(x)	+ ∞	↘	e	↗	+ ∞

3. On en déduit l'allure



4. (a) On a défini $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x) - x = e^x - \frac{e}{x} - x$. Sa dérivée est $u' : x \mapsto f''(x) - 1 = e^x + \frac{e}{x^2} - 1 > 0$. u est donc strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $] - \infty, +\infty[$. Comme elle est continue, elle réalise une bijection donc s'annule une et une seule fois en α.

   (b) Comme $u(1) = -1 < 0$ et $u(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 0$ par les inégalités proposées. On en déduit que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α et vérifiant $1 < \alpha < 2$.

Partie II : étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout n de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
   Pour $n = 0$ c'est clair.
   Si cela est réalisé pour un certain n , alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq e > 2$ d'où la conclusion.

2. (a) Considérons la fonction g $[2, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$.
   g est dérivable de dérivée $g' : x \mapsto f'(x) - 1$. Or f' est strictement croissante donc pour tout $x \geq 2$, $g'(x) \geq f'(2) - 1 = e^2 - \frac{e}{2} - 1 > 0$.
   Donc g est croissante.
   Comme $g(2) = f(2) - 2 > 0$ on en déduit que g est positive.

   (b) Comme pour tout $x \geq 2$, $g(x) \geq 0$ donc pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

3. Si la suite (u_n) était majorée elle convergerait vers une limite $\ell \geq 2$ et on aurait par passage à la limite $f(\ell) = \ell$ donc $g(\ell) = 0$ ce qui est absurde.
   Donc la suite n'est pas majorée, et comme elle est croissante, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

4. (a) On considère sur $[2, +\infty[$, $x \mapsto x - 2\ln x$ dont la dérivée est $x \mapsto 1 - \frac{2}{x} \geq 0$. La fonction est donc croissante. Or en 2 elle est positive car $\ln 2 < 1$ donc pour tout $x \in [2, +\infty[$, $2\ln x \leq x$.
   On considère sur $[2, +\infty[$, $x \mapsto \frac{e^x}{3} - x$ dont la dérivée est $x \mapsto \frac{e^x}{3} - 1 \geq \frac{e^2}{3} - 1 \geq 0$.

La fonction est donc croissante. Or en 2 elle est positive donc pour tout $x \in [2, +\infty[$, $2\ln x \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.

(b) Pour tout n , $u_n \geq 2$ donc $2\ln u_n \leq u_n \leq \frac{e^{u_n}}{3}$.
Or $u_{n+1} = e^{u_n} - e\ln(u_n) \geq 3u_n - e\frac{u_n}{2} \geq \frac{6-e}{2}u_n$.

Problème 3

1. (a) $\boxed{u_1 = 1 \text{ et } u_2 = 1 + \frac{1}{e}.}$

   (b) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{(H_n)\ u_n \geq 0.}$
   $n = 0$: $u_0 = 0 \geq 0$. (H_0) est donc vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) soit vraie. Montrons (H_{n+1}).
   $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$: le premier terme est positif par hypothèse de récurrence. Le deuxième est positif car c'est une exponentielle réelle. La somme de termes positifs est positive, donc $u_{n+1} \geq 0$ et (H_{n+1}) est vraie.
   Par le principe de récurrence $\boxed{(H_n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} \geq 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$

2. (a) Comme (u_n) converge vers L, par continuité de la fonction exponentielle, (e^{u_n}) converge vers e^L et par addition de deux limites, $(u_n + e^{u_n})$ converge vers $L + e^L$, i.e. (u_{n+1}) converge vers $L + e^L$. Or (u_{n+1}) converge vers L et donc par unicité de la limite, $L = L + e^L$, d'où $e^L = 0$: $\boxed{\text{contradiction.}}$

   (b) (u_n) étant croissante, par le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite finie ou diverge vers $+\infty$. Le premier cas aboutit à une contradiction, donc $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{v_n \text{ est positif}}$ comme exponentielle réelle.
   $u_{n+1} \geq u_n$ par 1.b.. Par croissance de la fonction exponentielle $v_{n+1} \geq v_n$ et donc $\boxed{(v_n) \text{ est croissante.}}$

   (b) On pose $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - 1 - x$. f est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$. f est donc croissante sur $[0,1]$. Or $f(0) = 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq f(0)$: $f(x) \geq 0$. $\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,1],\ e^x \geq 1 + x.}$
   On pose $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + ex - e^x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = e - e^x$, mais $x \geq 1$ et par croissance de la fonction exponentielle, $e \geq e^x$, d'où $g'(x) \geq 0$. g est donc croissante sur $[0,1]$ et puisque $g(0) = 0$, comme précédemment, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geq 0$, i.e. $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1],\ e^x \leq 1 + ex.}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_n = e^{u_n}$ et $u_n \geq 0$, donc $v_n \geq 1$ d'où $0 < \frac{1}{v_n} \leq 1$. On applique la première inégalité de la question précédente : $\boxed{1 + \frac{1}{v_n} \leq e^{\frac{1}{v_n}}.}$
   Alors $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + e^{-u_n}} = e^{u_n} e^{\frac{1}{e^{u_n}}} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}$. D'où $v_{n+1} - v_n = v_n \left(e^{\frac{1}{v_n}} - 1\right)$.
   Comme $e^{\frac{1}{v_n}} - 1 \geq \frac{1}{v_n}$, on obtient, puisque $v_n \geq 0$, $\boxed{v_{n+1} - v_n \geq 1.}$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par ce qui précède, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $v_{k+1} - v_k \geq 1$. Sommons ces inégalités. Il vient, par télescopage, $v_{n+1} - v_0 \geq n+1$ ou encore $v_{n+1} \geq n+2$. Finalement, $e^{u_{n+1}} \geq n+2$ et par croissance de ln, $u_{n+1} \geq \ln(n+2)$. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \ln(n+1)$.
   L'inégalité est vérifiée pour $n = 0$, d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ln(n+1).}$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. 3.c. donne $e^{\frac{1}{u_n}} \leq 1+\frac{e}{v_n}$. Or $v_{n+1} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}$, donc $v_{n+1} - v_n = v_n\left(e^{\frac{1}{v_n}} - 1\right) \leq e$. En sommant les inégalités $v_{k+1} - v_k \leq e$ pour k allant de 0 à n, on obtient $v_{n+1} - v_0 \leq e(n+1)$, puis $v_{n+1} \leq (n+1)e + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq ne + 1$ et par croissance de ln, $u_n \leq \ln(ne+1)$. Comme précédemment, le résultat est vrai aussi pour $n = 0$ et finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ln(ne+1).}$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(ne+1)$$

$$\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln(n) + \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{1}{ne}\right)$$

$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(e)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{ne}\right)}{\ln(n)}$$

Chaque terme qui encadre converge vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement, $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)$ converge vers 1 et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$