DEVOIR SURVEILLE 1 : un corrigé

Exercice 1 (MPI)

1. Soient $Z_1 = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $Z_2 = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$.

   (a) On a $|Z_1| = 2\sqrt{6}\sqrt{1^2+1^2} = 4\sqrt{3}$ et $|Z_2| = \sqrt{2}\sqrt{1^2+3} = 2\sqrt{2}$.
   Donc $Z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\boxed{\text{un argument de } Z_1 \text{ est donc } \frac{\pi}{4}.}$
   Et $Z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\boxed{\text{un argument de } Z_2 \text{ est donc } \frac{\pi}{3}.}$
   On en déduit que $\boxed{\text{le module de } \frac{Z_1}{Z_2} \text{ est } \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6}}$ et qu' $\boxed{\text{un de ses arguments est } \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}.}$

   (b) On a $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2\sqrt{6}(1+i)}{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{6}(1+i)}{\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})}\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\frac{1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{4}$ donc $\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right).}$

   (c) On en déduit que $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ et $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$

2. Les nombres complexes x et y vérifiant $x+y = 2+3i$ et $xy = -1+3i$ sont les solutions de l'équation $z^2 - (2+3i)z + (-1+3i) = 0$
   Le discriminant est $\Delta = (2+3i)^2 - 4(-1+3i) = 4+12i-9+4-12i = -1 = i^2$.
   Les solutions de l'équation sont donc $\boxed{x = \frac{2+3i+i}{2} = 1+2i \text{ et } y = \frac{2+3i-i}{2} = 1+i}$ ou $\boxed{x = 1+i \text{ et } y = 1+2i.}$

3. Soient x et y deux nombres réels compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et vérifiant $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

   (a) On a $x > 0$ et $\tan y > \tan\frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{x+2y > \frac{\pi}{2}.}$
   De plus $\tan x < 1$ donc $x < \frac{\pi}{4}$ et $y < \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{x+2y < \frac{5\pi}{4}.}$

   (b) Comme ni x ni y ni $2y$ ni $x+2y$ ne sont congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on a $\tan 2y = \frac{2\tan y}{1-\tan^2 y} = -\frac{4}{3}$
   et $\boxed{\tan(x+2y) = \frac{\tan x + \tan 2y}{1-\tan x \tan 2y} = \frac{\frac{1}{7}-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{21}} = \frac{-25}{25} = -1.}$

   (c) Grâce à l'intervalle on en déduit que $\boxed{x+2y = \frac{3\pi}{4}.}$

Exercice 2 (MPI)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

Or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann). Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 2} u_n \text{ converge.}}$

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = e^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln(n)}$. Or

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\
&= \frac{\frac{1}{n}+1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}\\
&= \left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= 1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'où $v_n = e^{-\left(\ln n + 2\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)} = \frac{1}{n}e^{-2\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}$. Or $2\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$. Or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 2} v_n \text{ diverge.}}$

3. $n^2 w_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^4}{2^n}$, donc $n^2 w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par comparaison aux séries de Riemann, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} w_n \text{ converge}}$ ($\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ est bien une série à termes positifs).

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
x_n &= e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \quad [n\to+\infty]\\
&= e^{-n}e^{1/2}e^{o(1)} \quad [n\to+\infty]
\end{aligned}$$

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1/2}(e^{-1})^n.$$

$\sum(e^{-1})^n$ converge (série géométrique de raison $1/e\in]-1,1[$. Par linéarité, $\sum e^{1/2}(e^{-1})^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ converge.

Exercice 3 (**MPI**)

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n^2}.$$

Or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge. Par linéarité, $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2}{n^2}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 3} u_n \text{ converge.}}$

Pour calculer sa somme, on va calculer ses sommes partielles. On va commencer par réécrire le terme général, qui est une fraction rationnelle en n. On va décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples. Posons

$$F = \frac{2X-1}{X^3-4X}.$$

$X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$ est bien premier avec $2X-1$. Il existe donc 3 réels a, b et c tels que

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+2}.$$

On trouve $a = \frac{1}{4}$ en évaluant XF en 0, puis $b = \frac{3}{8}$ en évaluant $(X-2)F$ en 2 et enfin $c = -\frac{5}{8}$ en évaluant $(X+2)F$ en -2.
On peut ainsi écrire, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$,

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{4n} + \frac{3}{8(n-2)} - \frac{5}{8(n+2)} \right) = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k}$$

Pour $n \geq 7$,

$$S_n = \frac{89}{96} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Notons S la somme cherchée, on peut passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans ce qui précède. On obtient

$$\boxed{S = \frac{89}{96}.}$$

Exercice 4 (MPI-MPI*)

1. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors, $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ et donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$. Par encadrement $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0.}$
   $(n+1)u_{n+1} = e^{-u_n} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$ et donc $\boxed{nu_n \underset{n \to +\infty}{\to} 1.}$

2. Par ce qui précède, $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Or, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

3. On a vu que $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. On a alors $e^{-u_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$, et donc $(n+1)u_{n+1} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou encore $nu_n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Finalement,

$$u_n = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   et donc

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   On décompose $(-1)^n u_n = v_n + w_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge par le théorème spécial à certaines séries alternées et comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge absolument par comparaison et donc converge. On conclut donc que $\boxed{\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge}}$ par linéarité.

Exercice 5 (**MPI***)

1. Posons $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n = \sqrt{n}.}$ On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, donc $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers 0, alors que (x_n) diverge clairement vers $+\infty$.

2. (a) On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $\sum C^n$ converge (série géométrique de raison $C \in \mathbb{R}$, avec $|C| < 1$). Par linéarité, $\sum C^n |x_1 - x_0|$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs $\sum |x_{n+1} - x_n|$ converge, donc $\sum (x_{n+1} - x_n)$ converge. Par transformation suite-série (ou télescopage) $\boxed{(x_n) \text{ converge.}}$
   (c) Notons $a \in \mathbb{C}$ la limite de la suite (x_n). f est continue car lipschitzienne. On peut donc passer à la limite dans la relation de récurrence et on obtient $\boxed{a = f(a).}$
   Supposons qu'il existe aussi $b \in \mathbb{C}$ tel que $f(b) = b$. Alors on a
   $$|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq C|a - b|.$$
   Comme $C < 1$, on a $|a - b| = 0$ et donc $b = a$. $\boxed{\text{Le point fixe est unique.}}$

3. (a) Tout d'abord, $m = \inf\limits_D g$ existe bien, car $\{g(z)\ |z \in D\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée (par 0).
   Par caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe $(z_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $g(z_n) \underset{n\to+\infty}{\to} m$. (z_n) étant bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $(z_{\varphi(n)})$ converge. Notons c sa limite. $c \in \mathbb{C}$. Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{\varphi(n)}| \leq 1$, on peut passer à la limite et on obtient $|c| \leq 1$, i.e. $c \in D$. g est continue sur D car 1-lipschitzienne. Donc $g(z_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} g(c)$. Par unicité de la limite, $m = g(c)$: $\boxed{m \text{ est bien atteinte.}}$
   (b) Montrons que c est un point fixe de f. Par l'absurde, supposons que ce ne soit pas le cas, alors $g(c) > 0$ et pour tout $z \in D$, $g(c) \leq g(z)$. Prenons $z = f(c)$ (qui est bien dans D). On a $(z \neq c)$
   $$g(f(c)) = |f(f(c)) - f(c)| < |f(c) - c| = g(c)$$
   on a donc une contradiction. Finalement, $\boxed{c \text{ est bien un point fixe de } f.}$

Problème 1 (**MPI-MPI***)

1. (a) $\boxed{u_1 = 1 \text{ et } u_2 = 1 + \frac{1}{e}.}$
   (b) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{(H_n)\ u_n \geq 0.}$
   $n = 0$: $u_0 = 0 \geq 0$. (H_0) est donc vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) soit vraie. Montrons (H_{n+1}).
   $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$: le premier terme est positif par hypothèse de récurrence. Le deuxième est positif car c'est une exponentielle réelle. La somme de termes positifs est positive, donc $u_{n+1} \geq 0$ et (H_{n+1}) est vraie.
   Par le principe de récurrence $\boxed{(H_n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} \geq 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$

2. (a) Comme (u_n) converge vers L, par continuité de la fonction exponentielle, (e^{u_n}) converge vers e^L et par addition de deux limites, $(u_n + e^{u_n})$ converge vers $L + e^L$, i.e. (u_{n+1}) converge vers $L + e^L$. Or (u_{n+1}) converge vers L et donc par unicité de la limite, $L = L + e^L$, d'où $e^L = 0$: $\boxed{\text{contradiction.}}$

(b) (u_n) étant croissante, par le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite finie ou diverge vers $+\infty$. Le premier cas aboutit à une contradiction, donc $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{v_n \text{ est positif}}$ comme exponentielle réelle.
$u_{n+1} \geq u_n$ par 1.b.. Par croissance de la fonction exponentielle $v_{n+1} \geq v_n$ et donc $\boxed{(v_n) \text{ est croissante.}}$

(b) On pose $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - 1 - x$. f est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$. f est donc croissante sur $[0,1]$. Or $f(0) = 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq f(0)$: $f(x) \geq 0$. $\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,1],\ e^x \geq 1 + x.}$
On pose $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + ex - e^x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = e - e^x$, mais $x \geq 1$ et par croissance de la fonction exponentielle, $e \geq e^x$, d'où $g'(x) \geq 0$. g est donc croissante sur $[0,1]$ et puisque $g(0) = 0$, comme précédemment, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geq 0$, i.e. $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1],\ e^x \leq 1 + ex.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_n = e^{u_n}$ et $u_n \geq 0$, donc $v_n \geq 1$ d'où $0 < \frac{1}{v_n} \leq 1$. On applique la première inégalité de la question précédente : $\boxed{1 + \frac{1}{v_n} \leq e^{\frac{1}{v_n}}.}$
Alors $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + e^{-u_n}} = e^{u_n} e^{\frac{1}{e^{u_n}}} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}$. D'où $v_{n+1} - v_n = v_n \left(e^{\frac{1}{v_n}} - 1\right)$.
Comme $e^{\frac{1}{v_n}} - 1 \geq \frac{1}{v_n}$, on obtient, puisque $v_n \geq 0$, $\boxed{v_{n+1} - v_n \geq 1.}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par ce qui précède, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $v_{k+1} - v_k \geq 1$. Sommons ces inégalités. Il vient, par télescopage, $v_{n+1} - v_0 \geq n+1$ ou encore $v_{n+1} \geq n+2$. Finalement, $e^{u_{n+1}} \geq n+2$ et par croissance de ln, $u_{n+1} \geq \ln(n+2)$. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \ln(n+1)$. L'inégalité est vérifiée pour $n = 0$, d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ln(n+1).}$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. 3.c. donne $e^{\frac{1}{u_n}} \leq 1 + \frac{e}{v_n}$. Or $v_{n+1} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}$, donc $v_{n+1} - v_n = v_n \left(e^{\frac{1}{v_n}} - 1\right) \leq e$.
En sommant les inégalités $v_{k+1} - v_k \leq e$ pour k allant de 0 à n, on obtient $v_{n+1} - v_0 \leq e(n+1)$, puis $v_{n+1} \leq (n+1)e + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq ne + 1$ et par croissance de ln, $u_n \leq \ln(ne+1)$. Comme précédemment, le résultat est vrai aussi pour $n = 0$ et finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ln(ne+1).}$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(ne+1)$$

$$\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln(n) + \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{1}{ne}\right)$$

$$1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(e)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{ne}\right)}{\ln(n)}$$

Chaque terme qui encadre converge vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement, $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)$ converge vers 1 et donc $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).}$

Problème 2 (**MPI***)

Partie I : règle de Cauchy

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n^{1/n} = l$.
   Suposons que $l < 1$ et utilisons la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. En posant $l' = \frac{1}{2}(1+l) < 1$ on obtient un n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u_n^{1/n} \leq l'$ et donc $u_n \leq l'^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.
   On en déduit que $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

   Suposons que $l > 1$ et utilisons la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$. En posant $l' = \frac{1}{2}(1+l) > 1$ on obtient un n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u_n^{1/n} \geq l'$ et donc $u_n \geq l'^n$ qui est le terme général d'une série géométrique divergente.
   On en déduit que $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

2. Utilisons cette règle avec : $u_n = \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$.
   On a bien $u_n > 0$ et $u_n^{1/n} = \frac{n+1}{2n+5}$ qui converge vers $\frac{1}{2} < 1$, donc la série $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

   Au tour de $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(lnn)^n}$ pour $n \geq 2$.
   On a bien $u_n > 0$ et $u_n^{1/n} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{(lnn)} = e^{\frac{\ln^2 n}{n} - \ln\ln n}$ qui a pour limite $0 < 1$ donc la série $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

Parie II : comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

1. **Théorème de Césàro.**
   Soit (x_n) une suite réelle convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$.
   On veut montrer que la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, converge également vers l.

   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La convergence de (x_n) vers l donne : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|y_n - l| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} l\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - l)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}|x_p - l|$$

$$\boxed{|y_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}|x_p - l|.}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N$. On en déduit

$$|y_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{1}{n}\sum_{p=N+1}^{n}|x_p - l|$$

donc

$$|y_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{1}{n}\sum_{p=N+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\boxed{|y_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{N}|x_p - l| + \frac{\varepsilon}{2}.}$$

Comme $M = \sum\limits_{p=1}^{N}|x_p - l|$ est une constante , la suite $\frac{M}{n}$ converge vers 0, donc il existe un rang N' tel que pour $n \geq N'$, $\frac{M}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi pour $n \geq \max(N, N')$ on a $|y_n - l| \leq \varepsilon$ et donc $\boxed{y_n \text{ converge vers } l.}$

2. Soit (x_n) une suite réelle telle que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $n \geq 1$, $X_n = x_n - x_{n-1}$ et appliquons lui le théorème de Cesaro.
   On a donc $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \frac{x_n}{n} - \frac{x_0}{n}$ qui converge vers l.
   Donc $\frac{x_n}{n} = Y_n + \frac{x_0}{n}$ converge bien vers l. $\boxed{\left(\frac{x_n}{n}\right) \text{ converge vers } l.}$

3. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ tende vers $l \in \mathbb{R}$.

   Supposons dans un premier temps que l est non nul.
   Alors en composant par ln qui est bien continue, on a $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ln x_{n+1} - \ln x_n$ qui converge vers $\ln l$.
   Et donc par le résultat précédent, on a $\frac{1}{n}\ln x_n = \ln(x_n^{1/n})$ qui converge vers $\ln l$, et donc en composant par exp qui est continue, on a bien $x_n^{1/n}$ qui converge vers l.

   Et si jamais $l = 0$, on a $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ln x_{n+1} - \ln x_n$ qui diverge vers $-\infty$
   Et donc par le résultat précédent, on a $\frac{1}{n}\ln x_n = \ln(x_n^{1/n})$ diverge vers $-\infty$ et donc en composant par exp , on a bien $x_n^{1/n}$ qui converge vers 0.
   Ainsi dans tous les cas, $\boxed{\text{la suite } (\sqrt[n]{x_n}) \text{ converge vers } l.}$

   Conclusion : si la règle de d'Alembert s'applique, celle de Cauchy aussi.

4. Soit (u_n) définie par $u_n = e^{(-1)^n - n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On a pour tout n , $u_n > 0$ et $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{(-1)^{n+1} - (-1)^n - n - 1 + n} = e^{-1 + 2(-1)^{n+1}}$.
   Donc $v_{2n} = e^{-3}$ et $v_{2n+1} = e$.
   Ces deux suites extraites ont donc des limites distinctes donc la suite v_n diverge, donc
   $\boxed{\text{on ne peut pas appliquer la règle de D'Alembert.}}$

   Cependant on a $u_n^{1/n} = e^{\frac{(-1)^n}{n} - 1}$ qui converge vers $e^{-1} < 1$. Et donc
   $\boxed{\text{on peut appliquer la règle de Cauchy et conclure avec la convergence de la série.}}$

On peut donc conclure que la réciproque est fausse :
$\boxed{\text{il est possible parfois que la règle de Cauchy s'applique alors que celle de D'Alembert échoue.}}$

Parie III : règle de Raabe-Duhamel

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad [n \to +\infty].$$
On suppose dans un premier temps que $\alpha > 1$. On choisit alors $\beta \in]1, \alpha[$, par exemple, $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n n^\beta$. On a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\beta-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad [n \to +\infty].$$
Comme $\beta - \alpha < 0$, il existe donc un rang n_0 à partir duquel
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq n_0 \implies \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1.$$
La suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante, tous ses termes sont inférieurs au premier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Longrightarrow v_n \leq v_{n_0}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq \frac{v_{n_0}}{n^\beta}$.
Comme (u_n) est à termes positifs, u_n est dominée par $\frac{1}{n^\beta}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\beta}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.
On procède de même dans le cas où $\alpha < 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad [n \to +\infty].$$
On peut donc appliquer la règle de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$: $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.
On peut aussi directement trouver un équivalent de (u_n) avec la formule de Stirling. On trouve
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$
Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$ aussi.

3. Lorsqu'on veut appliquer la règle de Raabe-Duhamel, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers 1 et on est dans le cas où la règle de d'Alembert ne s'applique pas. La règle de Raabe-Duhamel complète donc cette dernière en éclairant certains cas où on ne pouvait pas conclure avec la règle de d'Alembert. Vu ce qui a été démontré en II.3., il en est de même avec la règle de Cauchy.
De plus, si on est dans le cas où on ne peut pas conclure avec la règle de Raabe-Duhamel ($\alpha = 1$), on a toujours $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ qui converge vers 1 et donc on ne peut conclure ni avec la règle de d'Alembert, ni avec celle de Cauchy.
C'est donc une $\boxed{\text{règle complémentaire}}$, plutôt que concurrente.

Problème 3 (MPI)

1. (a) $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ et } X_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.}$

   (b)
$$\boxed{A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}8 & -5 & 1\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}.}$$

   (c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

2. (a) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On pose $V = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
$$v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \iff (A - I_3)V = 0.$$
On résout le système, on trouve $\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)).}$

   (b) On trouve $\boxed{\mathrm{Ker}(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1, 2, 4)).}$

   (c) On pose $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 2, 4)$. On cherche $v_3 = (x, y, z)$ tel que $f(v_3) = \frac{1}{2}v_3 + v_2$.
Posons $V = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
$$f(v_3) = \frac{1}{2}v_3 + v_2 \iff AV = \frac{1}{2}V + \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}.$$
On résout ce système. On trouve $z = 2y - 8$ et $x = \frac{1}{2}(y + 4)$. On choisit $v_3 = (1, -2, -12)$.
On vérifie que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$:
soient λ, μ et ν trois réels tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0$. On a alors
$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu &= 0\\ \lambda + 2\mu - 2\nu &= 0\\ \lambda + 4\mu - 12\nu &= 0\end{cases}.$$
$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ donnent
$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu &= 0\\ \mu - 3\nu &= 0\\ 3\mu - 13\nu &= 0\end{cases}.$$
$L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$ donne
$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu &= 0\\ \mu - 3\nu &= 0\\ -4\nu &= 0\end{cases}.$$
On trouve bien $\nu = 0$ et donc $\mu = 0$ et donc $\lambda = 0$.
Comme $\mathcal{B}'$ comporte 3 vecteurs et comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice représentative de f est ($f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = \frac{1}{2}v_2$ et $f(v_3) = \frac{1}{2}v_3 + v_2$)
$$\boxed{T = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.}$$

(d)

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -12 \end{pmatrix}.}$$

On trouve P^{-1} grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \longleftarrow -\frac{1}{4}L_3$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_3$ et $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$ donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3/2 & -3/4 & 1/4 \\ -5/2 & 13/4 & -3/4 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5/2 & 13/4 & -3/4 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5/2 & 13/4 & -3/4 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}.}$$

(e) La formule de changement de bas donne $T = P^{-1}AP$, donc $A = PTP^{-1}$.
On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^n = PT^nP{-}1.}$

(f) On peut écrire $T = D + N$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = 0$ et $DN = ND = \frac{1}{2}N$. On peut donc appliquer la formule du binôme et on trouve, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{T^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & n/2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1/2^n \end{pmatrix}.}$$

(g) Avec e., on trouve, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 4 - \frac{n+3}{2^n} & -4 + \frac{3n+8}{2^{n+1}} & 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} \\ 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} & -4 + \frac{3n+5}{2^n} & 1 - \frac{n+1}{2^n} \\ 4 - \frac{n+1}{2^{n-2}} & -4 + \frac{3n+2}{3^{n-1}} & 1 - \frac{n}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.}$$

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n X_0$. On trouve

$$\boxed{u_n = 4 - \frac{n+1}{2^{n-2}}.}$$

(b) Par croissances comparées, $\frac{n+1}{2^{n-2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 4.}$

Problème 4 (**MPI***)

1. $f \in \mathscr{E}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, f est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par la relation de Chasles, nous avons d'abord :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ensuite, le changement affine de variable: $u = t - T$ dans la dernière intégrale donne grâce à la T-périodicité de f:

$$\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)dt}$$

2. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, alors: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, puis en dérivant cette égalité par rapport à x, on obtient: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+T) = f'(x)$ donc $\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } T\text{-périodique, alors } f' \text{ est } T\text{-périodique}}$.

Par contre, si on considère la fonction identique $x \mapsto x$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, n'est pas périodique mais sa dérivée est constante sur $\mathbb{R}$ donc périodique (pour n'importe quelle période). Par conséquent, la réciproque étudiée est effectivement fausse :
$\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et si sa dérivée est } T\text{-périodique, alors } f \text{ n'est pas nécessairement périodique}}$.

3. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet au moins une primitive F sur $\mathbb{R}$, qui est par définition de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Nous avons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$, donc par différence de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{U(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et
$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(U(f)\big)'(x) = f(x) - f(x-1)}$.

4. Comme une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la question précédente prouve que U est une application de $\mathscr{E}$ dans lui-même.

   De plus, la linéarité de l'intégration des fonctions continues sur un segment justifie que U est linéaire :

   $$\forall (f,g)\in\mathscr{E}^2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}$$
   $$U(\lambda.f+g)(x)=\int_{x-1}^{x}(\lambda.f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_{x-1}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x-1}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t=\lambda.U(f)(x)+U(g)(x)$$
   $$U(\lambda.f+g)(x)=(\lambda U(f)+U(g))(x).$$

   Par conséquent, $\boxed{U \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{E}}$.

5. (a) Les fonctions polynomiales étant continues sur $\mathbb{R}$, nous pouvons considérer la restriction de U à E_n. Pour justifier que U définit un endomorphisme sur E_n, il suffit de montrer que E_n est stable par U. Pour cela, comme $\mathscr{B}_n$ est une famille génératrice de E_n, il suffit de montrer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $U(X^k)\in E_n$.

   Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $U(X^k)(x)=\int_{x-1}^{x}t^k\,\mathrm{d}t=\dfrac{x^{k+1}}{k+1}-\dfrac{(x-1)^{k+1}}{k+1}=\sum\limits_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\dfrac{(-1)^{k-j}}{k+1}x^j$,

   autrement dit $U(X^k)=\sum\limits_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\dfrac{(-1)^{k-j}}{k+1}X^j\in E_n$.

   Par conséquent, E_n est stable par U et $\boxed{U \text{ induit un endomorphisme } U_n \text{ sur } E_n}$.

   (b) Les calculs effectués dans la question précédente nous permettent d'écrire la matrice A_n de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$:

   $$A_n=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \dfrac{(-1)^n}{n+1}\\ 0 & 1 & -1 & & (-1)^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & & (-1)^n\dfrac{n}{2}\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

   plus précisément, les coefficients de A_n sont $a_{i,j}=\begin{cases}0 & \text{si } 1\le j<i\le n+1\\ \binom{j}{i-1}\dfrac{(-1)^{j-i}}{j} & \text{si } 1\le i\le j\le n+1\end{cases}$

   (c) La matrice A_n est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc A_n est inversible et par conséquent, $\boxed{U_n \text{ est bijectif}}$.

6. Si $f\in\mathrm{Ker}(U)$, alors $U(f)$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, d'où :

   (i) d'une part, $U(f)(1)=0$, c'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0}$,

   (ii) et d'autre part, sa dérivée, $U(f)'$, est aussi la fonction nulle, ainsi : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-f(x-1)=0$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est périodique de période } 1}$.

7. Réciproquement, si $f\in\mathscr{E}$, périodique de période 1 et telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$, alors $U(f)'$ est la fonction nulle, d'où $U(f)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ telle que $U(f)(1)=0$ donc $U(f)$ est la fonction nulle, par conséquent,

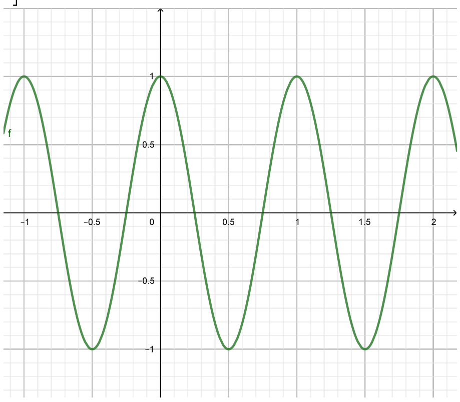
   $$\boxed{\mathrm{Ker}(U)=\left\{f\in\mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}}.$$

8. La fonction $\boxed{f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } t \mapsto \cos(2\pi t)}$ est continue, 1-périodique et vérifie

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 = 0,$$

donc f est bien une fonction non nulle, élément de $\mathrm{Ker}(U)$.

Sa représentation sur $[-1, 2]$ est:



9. La fonction valeur absolue est élément de $\mathscr{E}$ mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc elle n'admet pas d'antécédent par U (d'après **3.**), d'où $\boxed{U \text{ n'est pas surjectif}}$.

10. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $f_a : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

 (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = U(f_a)(x) = \int_{x-1}^{x} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}\mathrm{e}^{ax}$, donc $\boxed{F_a = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a} f_a}$.

 (b) La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, g est prolongeable par continuité en 0 par $g(0) = 1$, car il est connu que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

 De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + 1$.
 h est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $h'(x) = x\mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $h'(x)$ est du signe de x, d'où h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que h est positive sur $\mathbb{R}$, et même strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.
 Par conséquent, g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et par continuité de g sur $\mathbb{R}$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ensuite, il est immédiat que $\lim\limits_{-\infty} g = 0$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$. On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	+	+	||	+	+
g	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

 (c) D'après les résultats obtenus dans la question précédente, g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout réel $\lambda > 0$, il existe un réel b tel que $\lambda = g(b)$.

De plus, nous avons vu que si $a \neq 0$, alors $U(f_a) = g(-a)f_a$ donc si $b \neq 0$, $U(f_{-b}) = \lambda.f_{-b}$ où f_{-b} n'est pas la fonction nulle, donc tout réel λ strictement positif et différent de 1 il existe $v \in \mathscr{E}$ non nul tel que $U(v) = \lambda v$.
De plus, nous avons vu que $U(1) = 1$ (question **5.**). La propriété est donc encore valable pour 1.

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout réel } \lambda \text{ strictement positif il existe } v \in \mathscr{E},\ v \neq 0, \text{ tel que } U(v) = \lambda v}$.