DEVOIR SURVEILLE 1

Exercice 1 (**MPI**)

1. Soient $Z_1 = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $Z_2 = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$.

   (a) Calculer le module et un argument de Z_1, Z_2 et $\frac{Z_1}{Z_2}$.

   (b) Calculer le nombre complexe $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme cartésienne.

   (c) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Trouver les nombres complexes x et y vérifiant $x+y = 2+3i$ et $xy = -1+3i$.

3. Soient x et y deux nombres réels compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et vérifiant $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

   (a) Montrer que $\frac{\pi}{2} < x + 2y < \frac{5\pi}{4}$.

   (b) Calculer $\tan(x+2y)$.

   (c) En déduire la valeur de $x+2y$.

Exercice 2 (**MPI**)
Déterminer la nature des séries suivantes, dont on donne le terme général.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ u_n = \ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{n^2}{2^n+n}$, 4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Exercice 3 (**MPI**)
Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 3} u_n$, après avoir montré sa convergence, avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3, \qquad u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}.$$

Exercice 4 (**MPI-MPI***)
On définit (u_n) par $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

3. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 5 (**MPI***)

1. Donner une suite réelle (x_n) telle que $x_{n+1} - x_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et (x_n) diverge.

2. Soient $C \in [0, 1[$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$
On définit (x_n) par $x_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq C^n |x_1 - x_0|$.
   (b) En déduire que (x_n) converge.
   (c) Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) = a$. (a est appelé un point fixe de f).

3. On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Soit $f : D \to D$ telle que
$$\forall (x, y) \in D^2 \qquad x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$
Soit $g : z \in D \mapsto |f(z) - z|$.
   (a) A l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que $\inf\limits_D g$ est un minimum (i.e. est atteinte).
   (b) En déduire que f admet un unique point fixe.

Problème 1 (MPI-MPI*)
On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$, et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

1. **Premières propriétés**

   (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Déterminer le signe de la suite (u_n).

   (c) Donner le sens de variation de la suite (u_n).

2. **Divergence vers $+\infty$**

   (a) On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel L. Montrer que l'on aboutit à une contradiction.

   (b) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. **Obtention d'un équivalent**
   On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par la relation :

   $$v_n = e^{u_n}.$$

   (a) Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (v_n).

   (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ on a :

   $$1 + x \leq e^x \leq 1 + ex.$$

   (c) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a :

   $$1 + \frac{1}{v_n} \leq e^{\frac{1}{v_n}}.$$

   En déduire alors que $v_{n+1} - v_n \geq 1$.

   (d) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \ln(n + 1)$.

   (e) Montrer, à l'aide d'un raisonnement analogue, que pour tout entier naturel n, on a :

   $$u_n \leq \ln(ne + 1).$$

   (f) Donner un équivalent simple de la suite (u_n).

Problème 2 (MPI*)

Partie I : règle de Cauchy

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{1/n} = l$. Montrer **la règle de Cauchy** suivante :

$$\text{si } l < 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ converge et si } l > 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge.}$$

2. Donner la nature des séries suivantes : $\sum \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$, et $\sum \frac{n^{\ln n}}{(lnn)^n}$.

Parie II : comparaison des règles de d'Alembert et de Cauchy

1. **Théorème de Césàro.**
   Soit (x_n) une suite réelle convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$.
   Montrer que la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, converge également vers l.

2. Soit (x_n) une suite réelle telle que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ converge vers l.

   Remarque : on pourrait obtenir les mêmes résultats avec $l = +\infty$ ou $l = -\infty$. On n'en demande pas de démonstration, mais on pourra l'utiliser.

3. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ tende vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{x_n})$ converge vers l. (*On pourra distinguer* $l = 0$ *et* $l \neq 0$ *et appliquer* ln *pour se ramener au cas précédent.*)
   Quelle conclusion peut-on faire ?

4. Soit (u_n) définie par $u_n = e^{(-1)^n - n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Comparer les règles de d'Alembert et de Cauchy pour la série de terme général u_n. Que peut-on conclure ?

Parie III : règle de Raabe-Duhamel

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad [n \to +\infty].$$

   Montrer la **règle de Raabe-Duhamel** suivante :

$$\text{si } \alpha < 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge et si } \alpha > 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ converge.}$$

   On pourra, dans les deux cas, étudier la suite (v_n) *où, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n n^\beta$ *avec* β *judicieusement choisi.*

2. Etudier la nature de la série $\sum \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ en utilisant la règle de Raabe-Duhamel, puis par une autre méthode.

3. Comparer la règle de Raabe-Duhamel avec celle de d'Alembert, puis avec celle de Cauchy.

Problème 3 Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 (MPI)

On se propose d'étudier la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. **Transformation matricielle du problème**.
   (a) Déterminer X_0 et X_1.
   (b) Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

2. **Calcul des puissances de A.**
   On notera f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, i.e. dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A.
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. On trouvera une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur dont la première coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est 1.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \frac{1}{2}\mathrm{Id})$. On trouvera une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur dont la première coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est 1.
   (c) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. On choisira le troisième vecteur de la base avec une première coordonnée égale à 1.
   (d) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Expliciter P et calculer P^{-1}.
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
   (f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n.
   (g) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

3. **Retour à la suite** (u_n).
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Etablir la convergence et déterminer la limite de la suite (u_n).

Problème 4 (MPI*)
Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.
On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathscr{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour tout élément f de $\mathscr{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)dt$

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que si f est T-périodique, il en est de même pour f'

   Montrer que la réciproque est fausse.

3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.

   (a) Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n.

   (b) Ecrire la matrice de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$.

   (c) L'endomorphisme U_n est-il bijectif ?

6. Justifier que, si f, élément de $\mathscr{E}$, est dans $\mathrm{Ker}(U)$, alors:

   (i) $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
   (ii) f est périodique de période 1.

7. A-t-on : $\mathrm{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$?

8. Donner explicitement une fonction f non nulle, élément de $\mathrm{Ker}(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.

9. L'endomorphisme U est-il surjectif?

10. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

    (a) Déterminer $F_a = U(f_a)$.

    (b) Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

    (c) Montrer alors que pour tout réel λ strictement positif il existe un vecteur $v \in \mathscr{E}$, $v \neq 0$, tel que $U(v) = \lambda v$.