DEVOIR SURVEILLE 1

Exercice 1

1. Soient $Z_1 = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $Z_2 = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$.

   (a) Calculer le module et un argument de Z_1, Z_2 et $\frac{Z_1}{Z_2}$.

   (b) Calculer le nombre complexe $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme cartésienne.

   (c) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Trouver les nombres complexes x et y vérifiant $x+y = 2+3i$ et $xy = -1+3i$.

3. Soient x et y deux nombres réels compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et vérifiant $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

   (a) Montrer que $\frac{\pi}{2} < x + 2y < \frac{5\pi}{4}$.

   (b) Calculer $\tan(x+2y)$.

   (c) En déduire la valeur de $x+2y$.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^4(x)$.

2. Soit $(a,x) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, transformer en produit la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a+kx).$$

Exercice 3

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

2. Résoudre $\begin{cases} 2e^x - 6e^{y-2} & = & -\frac{4}{e^2} \\ e^{x+2} + 2e^y & = & 3 \end{cases}$.

Exercice 4

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$.

2. Déterminer la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin x - x\cos x}{\text{sh}x - x\text{ch}x}$.

Problème 1

Pour tout entier naturel non nul, on note f_n la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_n(x) = x - n\ln x.$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. **Etude de la suite (u_n).**

   (a) Montrer que $1 < u_n < e$ pour tout entier $n \geq 3$.

   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ pour tout entier $n \geq 3$, puis conclure que $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge, puis montrer que la limite de (u_n) est 1.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3. **Etude de la suite (v_n).**

   (a) Déterminer le comportement de (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) Calculer $f_n(n\ln n)$ puis montrer que $v_n > n\ln n$ pour tout entier $n \geq 3$.

   (c) Soit g la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - 2\ln x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier g et donner son signe. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2\ln n$.

   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln n)$ puis établir que $n\ln n < v_n < 2n\ln n$ pour tout entier $n \geq 3$.

   (e) Montrer enfin que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.

Problème 2

On considère la fonction f : $]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie pour tout x de $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=e^x-e\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7<e<2,8 \qquad 7,3<e^2<7,4 \qquad 0,6<\ln(2)<0,7.$$

Partie I : étude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$. On précisera aussi $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$. On précisera $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. (a) Etudier les variations de la fonction u : $]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f'(x)-x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x)=x$, d'inconnue $x\in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α et montrer : $1<\alpha<2$.

Partie II : étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=2 \quad \text{et, pour tout n de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1}=f(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n\geq 2$.

2. (a) Etudier les variations, puis le signe, de la fonction g $[2,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)-x$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

3. Démontrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

4. (a) Démontrer que pour tout $x\in[2,+\infty[$, $2\ln x\leq x\leq \frac{e^x}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geq\frac{6-e}{2}u_n$.

Problème 3
On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$, et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

1. **Premières propriétés**

   (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Déterminer le signe de la suite (u_n).

   (c) Donner le sens de variation de la suite (u_n).

2. **Divergence vers** $+\infty$

   (a) On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel L. Montrer que l'on aboutit à une contradiction.

   (b) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. **Obtention d'un équivalent**
   On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par la relation :

   $$v_n = e^{u_n}.$$

   (a) Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (v_n).

   (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ on a :

   $$1 + x \leq e^x \leq 1 + ex.$$

   (c) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a :

   $$1 + \frac{1}{v_n} \leq e^{\frac{1}{v_n}}.$$

   En déduire alors que $v_{n+1} - v_n \geq 1$.

   (d) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \ln(n + 1)$.

   (e) Montrer, à l'aide d'un raisonnement analogue, que pour tout entier naturel n, on a :

   $$u_n \leq \ln(ne + 1).$$

   (f) Donner un équivalent simple de la suite (u_n).