DEVOIR SURVEILLE 1

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^4(x)$.

2. Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, transformer en produit la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a + kx).$$

Exercice 2

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

2. Résoudre $\begin{cases} 2e^x - 6e^{y-2} & = & -\frac{4}{e^2} \\ e^{x+2} + 2e^y & = & 3 \end{cases}$.

Exercice 3

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$.

2. Déterminer la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin x - x\cos x}{\mathrm{sh}x - x\mathrm{ch}x}$.

Exercice 4
Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

a. $\frac{1}{n+(-1)^n}$ **b.** $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ **c.** $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **d.** $(-1)^n\left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 5
Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites définies par :

$$u_1 = 1,\ v_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Vérifier que $u_2 = \frac{1}{3}$ et $v_2 = \frac{4}{3}$, puis calculer u_3 et v_3.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont décroissantes et convergentes.
4. On pose ℓ la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$ et ℓ' celle de $(v_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 1}$ est constante et en déduire une relation entre ℓ et ℓ'.
   (b) En utilisant la relation $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$, trouver une autre relation entre ℓ et ℓ'.
   (c) En déduire les valeurs de ℓ et ℓ'.

Problème 1
On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout x de $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - e\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \qquad 7,3 < e^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : étude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$. On précisera aussi $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$. On précisera $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. (a) Etudier les variations de la fonction $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout n de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

2. (a) Etudier les variations, puis le signe, de la fonction g $[2,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

3. Démontrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

4. (a) Démontrer que pour tout $x \in [2,+\infty[$, $2\ln x \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2}u_n$.
   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

Problème 2
On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$, et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

1. **Premières propriétés**
   (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Déterminer le signe de la suite (u_n).

   (c) Donner le sens de variation de la suite (u_n).

2. **Divergence vers $+\infty$**
   (a) On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel L. Montrer que l'on aboutit à une contradiction.

   (b) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. **Obtention d'un équivalent**
   On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par la relation :

$$v_n = e^{u_n}.$$

   (a) Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (v_n).

   (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ on a :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + ex.$$

   (c) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 + \frac{1}{v_n} \leq e^{\frac{1}{v_n}}.$$

   En déduire alors que $v_{n+1} - v_n \geq 1$.

   (d) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \ln(n + 1)$.

   (e) Montrer, à l'aide d'un raisonnement analogue, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leq \ln(ne + 1).$$

   (f) Donner un équivalent simple de la suite (u_n).

Problème 3

Partie I

1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.
   On note alors A la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$.

2. Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.

3. Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

4. Soit x appartenant à $[-1, 1]$, montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

5. Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

6. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre un de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$.
   (b) Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par
   $$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Partie II

Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \cos(2nA(x))$.

1. Calculer f_0, f_1 et f_2.
   On vérifiera en particulier que pour tout entier naturel k inférieur ou égal à 2, il existe un polynôme P_k tel que
   $$\forall x \in [-1, 1], \quad f_k(x) = P_k(x).$$

2. (a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a + b) + \cos(a - b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
   (b) En déduire que, pour tout entier n, on a :
   $$\forall x \in [-1, 1], \quad f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1 - 2x^2)f_{n+1}(x).$$

3. Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que
   $$\forall x \in [-1, 1], \quad f_n(x) = P_n(x).$$

4. Soit n un entier.
   (a) Calculer f_n' et f_n''.
   (b) En déduire que f_n est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle
   $$(x^2 - 1)y'' + xy' - 4n^2y = 0.$$