DEVOIR SURVEILLE 1*

Exercice 1

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes (il peut donc y avoir 0, 1 ou 2 réponse(s) juste(s) par question). Une réponse juste vaut 1 point, une réponse fausse vaut -1 point, tandis qu'une absence de réponse donnera 0 point.

1. (a) Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z + z^4$ et $\beta = z^2 + z^3$. On montre :

   A) $\alpha + \beta = 1$
   B) $\alpha + \beta = -1$
   C) $\alpha\beta = 1$
   D) $\alpha\beta = -1$

   (b) Les nombres α et β sont les racines du trinôme du second degré :

   A) $X^2 + X - 1$
   B) $X^2 - X - 1$
   C) $X^2 + X + 1$
   D) $X^2 - X + 1$

   (c) On déduit des résultats précédents :

   A) $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$
   B) $\cos\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
   C) $\cos\dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
   D) $\cos\dfrac{8\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\dfrac{8\pi}{5} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

2. Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. On considère le nombre complexe $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

   (a) Le module de z vaut :

   A) $|z| = \sqrt{2+2\cos\theta}$
   B) $|z| = 2$
   C) $|z| = 2\cos(\theta/2)$
   D) $|z| = \sqrt{2} + \cos(\theta/2)$

   (b) Un argument α de z vérifie :

   A) $\alpha = (\theta/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   B) $\alpha = (\theta/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   C) $\tan\alpha = \tan(\theta/2)$
   D) $\tan\alpha = \tan(\theta/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   (c) On obtient ainsi :

   A) $z = 2\cos(\theta/2)\, e^{i\frac{\theta}{2}}$
   B) $z = 2\,|\cos(\theta/2)|\, e^{-i\frac{\theta}{2}}$
   C) $z = 2\,|\cos(\theta/2)|\,(\cos|\theta/2| + i\sin|\theta/2|)$
   D) $z = 2\cos^2(\theta/2)\,(1 + i\tan(\theta/2))$

Exercice 2
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ et expliciter $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
   (c) Montrer que f est dérivable en 0.
   (d) Dresser le tableau de variations de f et tracer sommairement l'allure de sa courbe.
2. Montrer par récurrence que pour tout naturel n il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x > 0$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$$
3. (a) En déduire par récurrence que pour tout n , f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.
   (b) Donner le développement limité à l'ordre n de f en 0.
4. On pose pour tout x réel
$$g(x) = f(x).f(1-x)$$
   (a) Justifier que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et constante nulle en dehors de $[0, 1]$.
   (b) Tracer le tableau de variations de g et l'allure de sa courbe.
5. On appelle espace de Schwartz et on note S l'ensemble des fonctions h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telles qu'il existe un segment $[a, b]$ en dehors duquel h est constante nulle.

   Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non réduit à $\{0\}$.

6. On s'intéresse à D ensemble des applications linéaires de S dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $d_0 : f \mapsto f(0)$ appartient à D.
   (b) Si $d \in D$ on définit d' par :
$$\forall h \in S \ , \ d'(h) = -d(h')$$
   Montrer que $d' \in D$.
   (c) Si $u \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit d_u par :
$$\forall h \in S \ , \ d_u(h) = \int_a^b u(t)h(t)dt$$
   où $[a, b]$ est un segment en dehors duquel h est nulle. Montrer que $d_u \in D$.
   (d) Montrer que pour $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
$$d_{u'} = d'_u$$

Exercice 3
Cet exercice a pour but de démontrer le résultat suivant : si n est un entier naturel, $n \geqslant 2$, les racines complexes du polynôme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ ont un module $< n$.

1. Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des nombres complexes de module $\leqslant 1$. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose que $\left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.
   (a) Démontrer que $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
   (b) On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = e^{\imath t}$. En développant $\left|\theta_1 + \theta_2 e^{\imath t}\right|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
   (c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$.
2. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. On note $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients :
   $$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$
   On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.
   (a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.
   (b) Déterminer les coefficients du polynôme $(X-1)P(X)$.
   (c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1.
3. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients :
   $$Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$
   On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.
4. Conclure.

Exercice 4 Déterminant de Vandermonde et applications.
Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle **matrice de Vandermonde** associée à ces complexes la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :
$$M(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
On note $V(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant de cette matrice.

Partie I : calcul du déterminant de Vandermonde.

1. **Condition nécessaire et suffisante d'annulation.**
   Soient des complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ et la matrice $\Lambda = (\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1})^T$.
   (a) Calculer $M(a_1, \ldots, a_n)\Lambda$.
   (b) En déduire que $V(a_1, \ldots, a_n)$ est nul si et seulement si deux des coefficients a_k sont égaux.
2. Soit φ l'application qui à un complexe x associe $V(a_1, \ldots, a_n, x)$. Montrer que φ est une fonction polynomiale.

3. Déterminer le degré, les racines et le coefficient dominant de φ.
4. Calculer $V(a_1, \dots, a_n)$ pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$.
5. **Exemples** Calculer $V(1, 2, \dots, n)$ et $V(n+1, \dots, 2n)$.

Partie II : une première application.

Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et Z la matrice de terme général $(P_j(a_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

1. En généralisant le calcul de la question I.1., montrer que le déterminant de Z peut s'écrire $\det(Z) = V(a_1, \dots, a_n).\mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de la famille $(P_j)_{1 \leq j \leq n}$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a_i et sur les polynômes P_j pour que Z ait un déterminant non nul.
3. Utiliser le calcul de la question II.1. pour calculer le déterminant de terme général $\binom{n+i}{j-1}$.

Partie III : une deuxième application.

Soit $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. On pose $P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (m_j - m_i)$. On souhaite montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} k!$ divise P.

1. On va montrer, dans un premier temps, que $k!$ divise le produit de k entiers consécutifs. Pour ce faire, on introduit les **polynômes de Hilbert**. Posons $H_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
   (b) En déduire que le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.
2. (a) Montrer :
$$V(m_1, \dots, m_n) = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_1(m_1-1) & \cdots & m_1(m_1-1)\cdots(m_1-n+1) \\ 1 & m_2 & m_2(m_2-1) & \cdots & m_2(m_2-1)\cdots(m_2-n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & m_n(m_n-1) & \cdots & m_n(m_n-1)\cdots(m_n-n+1) \end{vmatrix}.$$
   (b) Conclure.
3. Petit retour aux polynômes de Hilbert. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés
   (i) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$
   (ii) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) \in \mathbb{Z}$
   (iii) il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$.