DEVOIR LIBRE 9

Problème 1 Tirages successifs dans une urne.

Dans ce problème, b, r et c désignent trois entiers naturels non nuls.

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges.
Nous allons procéder à des tirages successifs dans cette urne de la manière suivante :

si la boule tirée est de couleur blanche, nous replaçons la boule tirée dans l'urne avec en plus c boules blanches,

si la boule tirée est de couleur rouge, nous replaçons la boule tirée dans l'urne avec en plus c boules rouges.

Pour tout entier naturel non nul n, nous désignons par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule sortie au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule sortie au n-ième tirage est rouge.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1 et la reconnaître.

2. (a) Justifier que les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_1 = 1)$ forment un système complet d'événements.

   (b) Sachant que la boule tirée lors du premier tirage est blanche :
      i. quel est le contenu de l'urne pour le deuxième tirage : i.e. combien y-a-t-il de boules blanches, combien y-a-t-il de boules rouges, combien y-a-t-il de boules au total ?

      ii. quelle est la probabilité que la boule lors du deuxième tirage soit blanche, soit rouge ?

   (c) Sachant que la boule tirée lors du premier tirage est rouge :
      i. quel est le contenu de l'urne pour le deuxième tirage : combien y-a-t-il de boules blanches, combien y-a-t-il de boules rouges, combien y-a-t-il de boules au total ?

      ii. quelle est la probabilité que la boule lors du deuxième tirage soit blanche, soit rouge ?

   (d) Déterminer la loi de probabilité de X_2 et la reconnaître.

3. (a) Déterminer la loi de probabilité du couple (X_1, X_2). Les résultats seront présentés sous forme de tableau.

   (b) Justifier que les quatre événements $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$, $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)$, $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)$ et $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$ forment un système complet d'événements.

   (c) Sachant que la boule tirée lors du premier tirage est rouge et que la boule tirée lors du deuxième tirage est blanche :
      i. quel est le contenu de l'urne pour le troisième tirage, combien y-a-t-il de boules blanches, combien y-a-t-il de boules rouges, combien y-a-t-il de boules au total ?

ii. quelle est la probabilité que la boule lors du troisième tirage soit blanche, soit rouge ?

(d) Montrer que la variable X_3 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$. Que peut-on conjecturer ?

4. Nous allons dans ce paragraphe, déterminer la loi de probabilité de X_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

i. Que représente la variable aléatoire S_n ?

ii. Quel est l'ensemble des valeurs prises par S_n ?

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i. Quel est le nombre de boules dans l'urne à l'issue du n-ième tirage ?

ii. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1)$.

iii. Justifier l'égalité :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1)P(S_n = k).$$

iv. Quelle est la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} P(S_n = k)$?

Reconnaître la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} kP(S_n = k)$.

v. Montrer que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{b + cE(S_n)}{b + r + nc}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous supposons que X_1, X_2, ..., X_n suivent une loi de bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

i. Calculer l'espérance de S_n.

ii. En déduire que $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{b}{b+r}$.

iii. Quelle est la loi suivie par X_{n+1} ?

(d) Quel raisonnement mathématique nous permet alors de conclure sur la loi suivie par les variables X_n, $n \in \mathbb{N}^*$?

Vous préciserez avec soin les numéros des questions qui étayent ce raisonnement et la loi de probabilité des variables X_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice
On considère une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir face est p avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
2 joueurs A et B lancent alternativement la pièce. A commence. Le premier joueur qui obtient face a gagné la partie.

1. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?

2. A-t-il plus de chance de gagner que B ?

3. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?

Problème 2
Les polynômes intervenant dans ce problème sont des polynômes à une indéterminée X sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un polynôme pourra être indifféremment noté P ou $P(X)$. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ sur $\mathbb{R}$, par F_n le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel), et par $[x]$ la partie entière d'un réel x.

Partie I

1. (a) Montrer que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ch}(n\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (\mathrm{ch}\alpha)^{n-2k} (\mathrm{ch}^2\alpha - 1)^k$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(n\alpha) = P_n(\mathrm{ch}\alpha).$$
   Expliciter P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

2. (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$:
   $$P_n + P_{n-2} = 2XP_{n-1}.$$

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

   (c) Calculer le terme de plus haut degré de P_n. Déterminer la parité de P_n.

   (d) Démontrer que, si $|x| > 1$ et $n \geq 1$, alors $|P_n(x)| > 1$.

3. Dans cette question n est un entier naturel non nul fixé.
   Démontrer que les racines de P_n sont toutes réelles, distinctes, et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$. Elles seront notées x_i, $0 \leq i \leq n-1$ de telle sorte que la suite des x_i soit strictement décroissante. On déterminera la valeur de x_i.

Partie II

1. (a) Pour f élément de E, justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

   (b) Montrer que l'application Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi \ : \ (f,g) \mapsto (f|g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

   définit un produit scalaire sur E. On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. Pour un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

   Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}, pour $n \geq 2$. En déduire la valeur de I_n.

3. (a) Calculer, pour m et n entiers naturels :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

   Que peut-on en déduire ?

   (b) Démontrer que

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^n P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$$

   lorsque n et m sont deux entiers naturels tels que $n < m$.

4. Soit h la fonction de E définie par $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculer la distance de h au sous-espace F_4, c'est-à-dire le nombre $d(h, F_4) = \inf_{P \in F_4} \|h - P\|$.