

DEVOIR LIBRE 8 bis

L'objet du problème est l'étude de quelques outils permettant l'étude des signaux déterministes.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On dit qu'une fonction f de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est à *support compact* s'il existe deux réels a et b vérifiant $a < b$ tels que f est nulle en dehors du segment $[a, b]$.

On considère dans tout le problème l'ensemble \mathcal{F}_{sc} des fonctions continues par morceaux de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; on appelle de telles fonctions des signaux réguliers.

On note $f^{(k)}$ la fonction dérivée k -ième d'une fonction de classe \mathcal{C}^k ; si $k = 0$, $f^{(k)} = f$.

I Étude de nouveaux espaces fonctionnels

I.A - Fonction test \mathcal{C}^∞ à support compact

On note \mathcal{D} l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^∞ et à support compact.

Dans cette sous-partie, on note φ la fonction définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ \varphi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

I.A.1)

- Étudier les variations de φ .
- Tracer la représentation graphique de φ .
- Montrer que φ est \mathcal{C}^∞ .
- Montrer que \mathcal{D} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} non réduit à $\{0\}$.

I.A.2) Montrer que la fonction dérivée de tout élément de \mathcal{D} est un élément de \mathcal{D} .

I.A.3)

- Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$ est un réel strictement positif.
- Pour tout réel x , on pose $\theta(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $\rho_n(x) = n\theta(nx)$.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) dx = 1$$

Pour toute fonction f appartenant à \mathcal{F}_{sc} et tout entier naturel non nul n , on pose

$$(f * \rho_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \rho_n(x-t) dt$$

I.A.4) Soit f une fonction appartenant à \mathcal{F}_{sc} .

Montrer que la fonction $f * \rho_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

I.A.5) Soit I la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle $[-1, 1]$, et 0 ailleurs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = I * \rho_n(x)$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer $I_n(x)$ en fonction de φ .
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n appartient à \mathcal{D} et étudier ses variations.
- Représenter graphiquement I_2 et I_3 .
- Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge simplement vers une fonction J que l'on déterminera. Montrer que J et I sont égales sauf sur un ensemble fini de points.
- La suite de fonction (I_n) converge-t-elle uniformément vers J ?

I.B - Fonctions C^∞ à décroissance rapide

On dit qu'une fonction réelle f de classe C^∞ sur \mathbb{R} est à décroissance rapide si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0$$

On note \mathcal{S} l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^∞ à décroissance rapide.

I.B.1) Montrer que \mathcal{S} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

I.B.2) Montrer que si f est dans \mathcal{S} alors $f^{(p)}$ est dans \mathcal{S} pour tout entier naturel p .

I.B.3) Montrer que si P est une fonction polynôme et si f est dans \mathcal{S} , alors Pf appartient à \mathcal{S} .

II Espace des distributions sur \mathcal{D} **II.A - Définitions, exemples**

On dit que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{D} converge dans \mathcal{D} vers la fonction φ de \mathcal{D} et on note $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ si, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(\varphi_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi^{(k)}$ et s'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |x| > a \implies \varphi_n(x) = 0$$

On appelle distribution sur \mathcal{D} toute application linéaire $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \forall (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \implies T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$$

On note \mathcal{D}' l'ensemble des distributions sur \mathcal{D} .

II.A.1) Montrer que si $f \in \mathcal{F}_{sr}$, alors l'application T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx$$

définit une distribution sur \mathcal{D} .

On appelle distribution régulière toute distribution de la forme T_f , où $f \in \mathcal{F}_{sr}$.

II.A.2) Soit U la fonction définie par

$$\begin{cases} U(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \\ U(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Justifier que U définit une distribution sur \mathcal{D} .

II.A.3) Soit a un nombre réel.

a) Montrer que l'application δ_a qui à tout $\varphi \in \mathcal{D}$ associe $\varphi(a)$ est une distribution.

b) En utilisant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de \mathcal{D} définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_n(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{(t-a)^2}{(t-a+1/n)(t-a-1/n)}\right) & \text{si } t \in]a-1/n, a+1/n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer que $\forall f \in \mathcal{F}_{sr}, T_f \neq \delta_a$.

II.B - Dérivation des distributions sur \mathcal{D}

Si T est une distribution sur \mathcal{D} , on définit la distribution dérivée T' par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

II.B.1) Justifier que T' est une distribution sur \mathcal{D} .

Dans la suite du problème, pour $f \in \mathcal{F}_{sr}$, on notera $T'_f = (T_f)'$.

II.B.2) Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Si f est de classe C^1 , montrer que $(T_f)' = T_{f'}$. Adapter ce résultat au cas où f est de classe C^1 par morceaux.

II.B.3) Montrer que $T'_U = \delta_0$.

II.B.4) On considère l'application T qui à toute fonction φ de \mathcal{D} associe le nombre réel $T(\varphi)$ défini par

$$T(\varphi) = \int_{-1}^0 t\varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$$

- a) Montrer que T est une distribution régulière.
 b) Calculer la dérivée de cette distribution.

II.B.5) Si f est un élément de \mathcal{F}_{sr} et si a est un réel, on pose

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a^-) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+)$$

La différence $f(a^+) - f(a^-)$, appelée saut en a , est notée $\sigma(a)$.

a) Soient a_1, \dots, a_p des réels tels que $a_1 < \dots < a_p$.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

On suppose de plus que f est continue sur $]-\infty, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup \dots \cup]a_p, +\infty[$.

Montrer que

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^p \sigma(a_i) \delta_{a_i}$$

b) Retrouver par cette méthode les résultats des questions II.B.3 et II.B.4.b.

II.C - Suites de distributions sur \mathcal{D}

On dit que la suite de distributions $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la distribution T si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi) = T(\varphi)$$

II.C.1) Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction U_n nulle sur les réels négatifs, affine sur l'intervalle $[0, 1/n]$, égale à 1 pour les réels plus grand que $1/n$ et continue sur \mathbb{R} .

- a) Montrer que la suite de distributions régulières $(T_{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers T_U .
 b) Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad T'_{U_n}(\varphi) = \int_0^{1/n} n\varphi(t) dt$$

- c) En déduire que la distribution T'_{U_n} est régulière et donner une fonction V_n telle que $T_{V_n} = T'_{U_n}$.
 d) Représenter V_n pour $n = 1, 2, 4$.
 e) Montrer que si la suite de distributions $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la distribution T , alors $(T'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers T' .
 f) Quelle est la limite de T'_{U_n} quand n tend vers l'infini ?

II.C.2) Pour tout entier naturel non nul n , on considère les fonctions

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \\ g_n(x) = nx^n \\ h_n(x) = n^2 \sin nx \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } x \in [0, 1] \text{ et nulle ailleurs} \\ \text{si } x \in [-\pi/n, \pi/n] \text{ et nulle ailleurs} \end{array}$$

- a) Vérifier qu'elles appartiennent à \mathcal{F}_{sr} .
 b) Étudier les variations des fonctions f_n , g_n et h_n puis tracer leur représentation graphique pour $n = 1$ et $n = 2$.
 c) Étudier la convergence des suites de distributions (T_{f_n}) , (T_{g_n}) et (T_{h_n}) .