DEVOIR LIBRE 8

Exercice 1
On note A une matrice carrée d'ordre $n > 0$ à coefficients complexes.
Le noyau et l'image d'une matrice désignent respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice.
On considère la matrice M_A carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs de la façon suivante :

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit ϕ l'application qui à tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ associe le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.
   (a) ϕ est clairement linéaire. Montrer que ϕ est injective.
   (b) Montrer que le noyau de la matrice A et le noyau de la matrice M_A sont isomorphes. Quelle relation en déduit-on entre les dimensions de $\ker(M_A)$ et de $\ker(A)$?
   (c) En déduire le rang de la matrice M_A en fonction du rang de la matrice A. Citer le théorème utilisé.
2. On suppose, dans cette question, que la matrice A est diagonalisable et inversible.
   (a) Exprimer la matrice M_A^2 en fonction de A.
   (b) Démontrer que la matrice M_A^2 est diagonalisable.
   (c) Montrer que la matrice M_A^2 est inversible.
   (d) En déduire, en citant le théorème du cours utilisé, que la matrice M_A est diagonalisable.
3. On suppose, dans cette question, que la matrice M_A est diagonalisable.
   (a) Démontrer que $\operatorname{Im}(M_A) = \operatorname{Im}(M_A^2)$.
   (b) En déduire $\ker(M_A) = \ker(M_A^2)$.
   (c) Montrer que la matrice A est inversible (indication : pour $(x_1, \cdots, x_n) \in \ker A$, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pourra considérer le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$).
   (d) Démontrer que la matrice A est diagonalisable.
4. Que peut-on déduire des questions 2) et 3) ?

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \text{Arctan}(u) \leq u$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{cccl} f_x & : & \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto f_x(t) = \frac{t}{t^2+x^2}\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \end{array}$$

   est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On considère :

$$\begin{array}{cccl} g & : & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt. \end{array}$$

   (a) i. Déduire de la question 1. l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2x}.$$

   ii. Montrer que g admet une limite quand x tend vers $+\infty$. Quelle est cette limite ?

   (b) i. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\pi}{8} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \leq \int_0^1 \frac{t}{t^2+x^2}\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

   ii. En déduire le comportement de g quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

4. (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -2xh(x)$ en posant $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)^2}\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

   (b) En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$. Déterminer A et B réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)} = \frac{A}{t^2+x^2} + \frac{B}{t^2+1}.$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$h(x) = \frac{\pi}{4x^2(x+1)}.$$

   (c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = \frac{\pi}{4x^2(x+1)}.$$

6. En déduire $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

7. En déduire $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3
On considère les fonctions définies par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{2xt}-1} dt.$$

1. Pour un réel $x > 0$, justifier la convergence de l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$$
puis calculer la valeur de cette intégrale (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2xt$).

2. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de F.

3. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Que peut-on dire de F sur $\mathbb{R}_-^*$?

4. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité :
$$\frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$$
puis établir que $F(x) \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$.

5. Pour $x > 0$, démontrer de même l'inégalité : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt - 1 \leq F(x)$.

6. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers 0^+ et la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. Etudier les variations de F puis représenter graphiquement la fonction F sur $\mathbb{R}^*$.

8. Démontrer que G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, établir la convergence de l'intégrale :
$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-\alpha t} dt$$
et calculer sa valeur.

11. Démontrer que quels que soient $t > 0$ et $x > 0$:
$$\frac{\sin(t)}{e^{2xt}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t) e^{-2nxt}.$$

12. En déduire une relation entre F et G (on justifiera la réponse).

Exercice 4
On note E l'ensemble des suites réelles bornées u telles que $u_0 = 0$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Pour u dans E, on pose

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \text{et} \qquad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

   Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E.

3. Montrer que pour tout u dans E, $N(u) \leq 2N_\infty(u)$.

4. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite u^p de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n^p = \left| \begin{array}{ccc} \frac{n}{p} & \text{si} & n \leq p \\ \frac{2p-n}{p} & \text{si} & p < n \leq 2p \\ 0 & \text{si} & 2p < n. \end{array} \right.$

   Montrer que u^p appartient à E.

   (b) A l'aide de ce qui précède, montrer qu'il n'existe pas de réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in E$, $N_\infty(u) \leq \alpha N(u)$.