DEVOIR LIBRE 7 bis

Notations et objectifs

On désigne par $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel des fonctions f continues et intégrables sur $\mathbb{R}$.
On considère l'application linéaire $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f} \quad \text{où} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t)dt.$$

La fonction $\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de la fonction f.

Après avoir étudié sur des exemples quelques propriétés de la transformée de Fourier dans la première partie, on détermine dans la deuxième partie la transformée de Fourier d'une fonction $\mathcal{H}_0$. Dans une troisième partie, indépendante des deux précédentes, on introduit une suite de fonctions $(\mathcal{H}_n)$ dont on détermine la transformée de Fourier dans une quatrième partie.

Partie I

Dans cette partie f désigne une fonction appartenant à $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1. Justifier l'existence et étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\hat{f}$.
2. On suppose que la fonction f est à valeurs réelles.
   (a) Montrer que si f est une fonction paire alors $\hat{f}$ est une fonction paire et à valeurs réelles.
   (b) Que peut-on dire de $\hat{f}$ si la fonction f est impaire ?
3. On suppose que la fonction $\hat{f}$ est impaire ; montrer qu'il existe un nombre complexe μ, que l'on explicitera, tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt.$$
4. **Premier exemple.**
   On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $p(t) = 1 - t$ lorsque $t \in [0,1]$
   $p(t) = 0$ lorsque $t \in]1,+\infty[$
   $p(-t) = p(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que p appartient à $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
   (b) Expliciter $\hat{p}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) La fonction $\hat{p}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ (resp $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$? Les réponses seront justifiées soigneusement, on pourra utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
   (d) La fonction $\hat{p}$ appartient-elle à $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{C})$?

5. **Deuxième exemple.**
   Pour tout entier naturel n on considère la fonction E_n définie sur $\mathbb{R}$ par $E_n(t) = |t|^n e^{-|t|}$.
   On se propose de déterminer la transformée de Fourier $\widehat{E_n}$ de cette fonction.
   On considère la fonction K_n de la variable réelle x définie par :

   $$K_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{(-1+ix)t} dt.$$

   Pour simplifier l'écriture, on désigne par α le nombre complexe $1 - ix$ et on écrira

   $$K_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt.$$

   (a) Montrer que $E_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{E_n}(x)$ à l'aide de la partie réelle de K_n.
   (b) Exprimer K_n en fonction de n et α (on commencera par établir une relation de récurrence entre K_n et K_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$).
   (c) Expliciter $\widehat{E_0}(x)$, $\widehat{E_1}(x)$ et $\widehat{E_2}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (d) Montrer qu'il existe une fonction β définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles, que l'on explicitera, telle que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{E_n}(x) = \frac{2(n!) \cos\left((n+1)\text{Arctan} x\right)}{(1+x^2)^{\beta(n)}}.$$

   (e) La fonction $\widehat{E_n}$ appartient-elle à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?

6. Soient c et d deux nombres réels tels que $c < d$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(t) = 0$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$; on suppose que la fonction $\hat{f}$ est impaire.
   Montrer que la fonction $(a, b) \mapsto \int_a^b \frac{\hat{f}(x)}{x} dx$ est bornée lorsque (a, b) décrit $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
   (On rappelle et on admettra que l'ensemble $\left\{\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u} du\right|, (a, b) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\right\}$ est borné et on désignera par M sa borne supérieure et que si g est une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$, alors $\int_a^b \left(\int_c^d g(x, t) dt\right) dx$ et $\int_c^d \left(\int_a^b g(x, t) dx\right) dt$ ont un sens et sont égales.)

7. La fonction $x \mapsto \frac{\text{Arctan x}}{x \ln(2+x^2)}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

8. Existe-t-il deux nombres réels c et d, avec $c < d$, et une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(t) = 0$ lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus [c, d]$ et telle que $\hat{f}(x) = \frac{\text{Arctan} x}{\ln(2+x^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Partie II : transformée de Fourier de $\mathcal{H}_0$.

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{H}_0$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathcal{H}_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ et on se propose de déterminer la transformée de Fourier $\widehat{\mathcal{H}_0}$ de $\mathcal{H}_0$ en utilisant deux méthodes différentes.

1. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; en déduire que $\mathcal{H}_0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_0(t) dt$.

Première méthode de calcul de $\hat{\mathcal{H}}_0$.

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions g_n par :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n appartient à $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(b) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

i. Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

ii. En déduire une expression simple de $\frac{I_n}{(2n)!}$.

(c) On considère la série de fonctions $\sum h_n$, où pour $n \in \mathbb{N}$, $h_n : x \mapsto (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$; montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donner pour $x \in \mathbb{R}$ la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$.

3. Vérifier que pour tout x réel, la fonction, définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt)$, est intégrable $\mathbb{R}$.

4. Justifier avec soin l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathcal{H}_0}(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

5. Déduire de ce qui précède une expression simple de $\widehat{\mathcal{H}_0}$ à l'aide des fonctions usuelles.

Deuxième méthode de calcul de $\hat{\mathcal{H}}_0$.

Pour simplifier l'écriture, on convient de noter φ la fonction $\hat{\mathcal{H}}_0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt.$$

6. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de φ'.

7. En déduire que φ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre $(\mathcal{E})$.

8. Résoudre $(\mathcal{E})$. Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et retrouver ainsi le résultat obtenu à la question **II.5.**.

9. Déduire de ce qui précède qu'il existe un nombre réel λ_0 que l'on explicitera tel que $\hat{\mathcal{H}}_0 = \lambda_0 \mathcal{H}_0$.

Partie III : la suite $(\mathcal{H}_n)$.

On définit sur $\mathbb{R}$ deux suites de fonctions (H_n) et $(\mathcal{H}_n)$ respectivement par : (pour $t \in \mathbb{R}$)

$$H_0(t) = 1 \quad \text{et} \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\mathcal{H}_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

1. Expliciter, pour $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_1(t)$ et $\mathcal{H}_2(t)$.

On suppose dans ce qui suit que $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour simplifier, on note G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G : t \mapsto e^{-t^2}$ et $G^{(n)}$ sa dérivée n-ième. En remarquant que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G'(t) = -2tG(t)$ et en dérivant n fois cette égalité, établir une relation entre $H_{n+1}(t)$, $H_n(t)$, $H_{n-1}(t)$, t et n ; en déduire l'expression de $\mathcal{H}_{n+1}(t)$ en fonction de $\mathcal{H}_n(t)$, $\mathcal{H}_{n-1}(t)$, t et n.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$.

   (a) En dérivant la relation $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} G^{(n)}(t)$ obtenir l'expression de $H'_n(t)$ en fonction de $H_n(t)$, $H_{n+1}(t)$ et t.

   (b) Déduire de ce qui précède l'expression de $H'_n(t)$ en fonction de $H_{n-1}(t)$ et n.

   (c) Exprimer $\mathcal{H}'_n(t)$ en fonction de $\mathcal{H}_n(t)$, $\mathcal{H}_{n-1}(t)$, t et n.

Partie IV : transformée de Fourier de $\mathcal{H}_n$.

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{H}_n$ les fonctions définies dans la troisième partie.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2. **Détermination de $\widehat{\mathcal{H}_1}$.**

   (a) Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathcal{H}_1}(x)$ en fonction de $\widehat{\mathcal{H}_0}(x)$ et de x.

   (b) Déterminer le nombre complexe λ_1 tel que :

   $$\widehat{\mathcal{H}_1} = \lambda_1 \mathcal{H}_1.$$

3. On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n la fonction $\mathcal{H}_n$ est un vecteur propre de l'application linéaire $\mathcal{F}$ définie dans l'introduction.

   (a) Exprimer $\widehat{\mathcal{H}_{n+1}}$ en fonction de $(\widehat{\mathcal{H}_n})'$, $\widehat{\mathcal{H}_{n-1}}$ et n (on suppose $n \geq 1$).

   (b) Etablir par récurrence que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :

   $$\mathcal{F}(\mathcal{H}_n) = \widehat{\mathcal{H}_n} = \lambda_n \mathcal{H}_n$$

   où λ_n désigne un nombre complexe que l'on explicitera.