DEVOIR LIBRE 7

Exercice 1
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \leq n$, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$. On définit

$$N \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{p} \left(\alpha_i \left| \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \right). \end{array}$$

Montrer que N est une norme si et seulement si $n = p$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2
Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx$.

1. Pour quelles valeurs de (α, β), $I(\alpha, \beta)$ est-elle définie ?

2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in]-1, +\infty[$. Montrer
$$I(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta + 1} I(\alpha - 1, \beta + 1).$$

3. Déduire de ce qui précède la valeur de $I(n,p)$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

4. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \; \cos^{2q-1} \theta d\theta$ pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \mathbf{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$, ainsi que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$, appelée intégrale de Gauss.

Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres.

Partie I : existence de F et I

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par, pour tout x de $[0, +\infty[$, $f(x) = \mathbf{e}^{-x^2}$.

1. (a) Donner le tableau de variations de f. On fera figurer les limites en 0 et en $+\infty$.

   (b) Tracer la courbe représentative de f. On précisera la demi-tangente en $(0,1)$ et l'asymptote.

2. Démontrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et donner sa dérivée. On citera précisément le théorème utilisé.

3. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ est convergente.

Partie II : calcul de I

On pose, pour tout x de $[0,+\infty[$, $G(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que G est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. On pourra montrer que pour tout réel a strictement positif, la restriction de G à l'intervalle $[0,a]$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Donner l'expression de $G'(x)$.

2. (a) Montrer que la fonction $H = F^2 + G$ est constante. On pourra faire un changement de variable linéaire dans l'une des intégrales apparaissant dans la dérivée de H.

   (b) Calculer cette constante en considérant $x = 0$.

3. (a) Montrer que, pour tout $(x,t) \in [0,+\infty \times [0,1]$: $0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
   En déduire que : $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

   (b) Déduire de ce qui précède que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Étudier les variations de F sur $[0,+\infty[$. Tracer sa courbe représentative en précisant la demi-tangente en $(0,0)$ et l'asymptote.

Partie III : une application

1. Soit k un entier plus grand que 1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   On note
   $$J_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}} dt.$$

2. Donner la valeur de J_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}\ \mathrm{ch} t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   On note
   $$K = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ \mathrm{ch} t} dt.$$

4. (a) Montrer que $K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1+e^{-2t})} dt$.

   (b) En déduire que $K = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$.

5. Montrer que $\frac{1}{2} < K < 1$. *On admettra que* $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{11}} > \frac{1}{2}$.