DEVOIR LIBRE 7

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}.$$

Partie préliminaire

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$
est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

3. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt.$$

Partie I : calcul de F sur $]0,+\infty[$

4. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

5. Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

6. Montrer que
$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan(x)}.$$

Partie II : conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :
$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)dt.$$

7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

8. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :
$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt.$$

9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.